

A1 0.20 Оцените радиус пятна R на экране.

Как известно, при дифракции на отверстии лучи приближённо расходятся на $\theta = \frac{\lambda}{2R_0}$. Тогда размер пятна на экране

$$R \approx R_0 + L\theta = R_0 \left(1 + \frac{L\lambda}{2R_0^2} \right)$$

A2 0.20 Оцените интенсивность I в центре пятна.

Из ЗСЭ получим $I_0\pi R_0^2 \approx I\pi R^2$. Тогда ответ

$$I = I_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{L\lambda}{2R_0^2} \right)^2}$$

A3 0.30 Оцените минимальный достижимый радиус пятна $R_{\min}$ при варьировании радиуса отверстия.

Продифференцировав выражение для размера пятна, получим, что $R_{\min}$ соответствует $R_0 = \sqrt{L\lambda/2}$. Тогда ответ

$$R_{\min} \approx \sqrt{2L\lambda}$$

B1 0.20 Оцените диаметр D_F пятна в фокусе линзы.

Лучи расходятся на угол θ . Расстояние до фокуса F . Тогда диаметр пятна

$$D_F \approx 2\theta F = 2\frac{F\lambda}{D}.$$

Здесь считаем, что радиус первого светлого пятна определяется первым минимумом. Можно считать, что радиус первого светлого пятна в два раза меньше, чем первый минимум.

B2 0.30 Оцените интенсивность I_F в фокусе линзы из энергетических соображений.

Запишем ЗСЭ:

$$I_0 \frac{\pi}{4} D^2 = I\pi R^2 = I\pi \left(\frac{F\lambda}{D} \right)^2.$$

Тогда ответ:

$$I \approx I_0 \frac{D^4}{4F^2\lambda^2}$$

B3 1.00 Теперь посчитайте ответ для интенсивности I_F в фокусе линзы точно. Сравните с предыдущим пунктом.

Точный ответ можно посчитать при помощи зон Френеля. Пусть интенсивности I и I_0 соответствуют амплитудам E и E_0 соответственно. Заметим, что фокус – такая точка, что лучи проходят одинаковые пути от внешней поверхности линзы до него и, соответственно, прибывают туда в фазе. Если бы линзы не было, то из отверстия из-под линзы в фокусе было бы видно m зон Френеля, $\frac{1}{4}D^2 = m\lambda F$. Тогда длина спирали Френеля равна $\pi m E_0 = \frac{\pi}{4} \frac{D^2}{\lambda F} E_0$. Заметим, что когда есть линза, все волновые фронты приходят в фокус в фазе и спираль "выпрямляется". Тогда $E = E_0 \frac{\pi}{4} \frac{D^2}{\lambda F}$ и ответ:

$$I = I_0 \frac{\pi^2}{16} \frac{D^4}{F^2\lambda^2}$$

Видно, что оценка в предыдущем пункте сходится с ответом.\\
Можно получить ответ, если показать, что при некой ширине ког в фокусе линзы будет наблюдаться большая интенсивность, чем на поверхности источника.

C1 0.30 Найдите фокусное F расстояние зеркала.

Уравнения параболы , при вращении которой образуется зеркало $y^2 = 2px$. Как известно, парабола – ГМТ точек, равноудалённых от некой прямой и точки. Пусть фокусное расстояние F . Тогда расстояние от точки $(0, 0)$ до прямой тоже F . Рассмотрим точку параболы, x - координата которой равна координате фокуса. Тогда она удалена на $2F$ от прямой и от фокуса. Получаем, что $4F^2 = 2pF$ и ответ:

$$F = \frac{1}{2}p$$

C2^{0.30} Оцените интенсивность I в фокусе зеркала.

Опять запишем ЗСЭ. Оценка углового расхождения аналогична $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$. Тогда размер пятна в фокусе $R = F\theta = \frac{F\lambda}{D} = \frac{p\lambda}{D}$. Из ЗСЭ получаем:

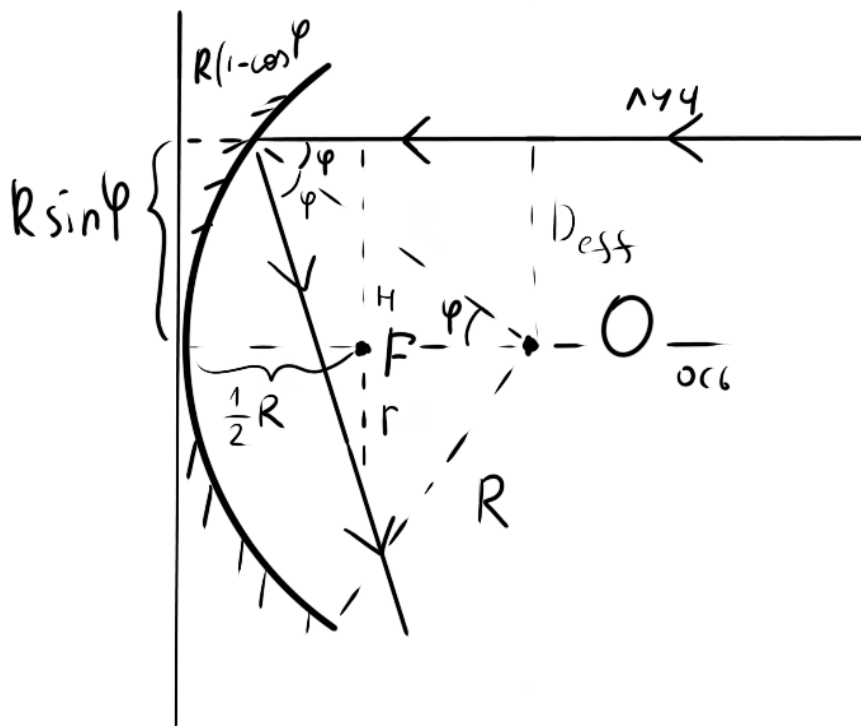
$$I \approx I_0 \frac{D^4}{p^2 \lambda^2}$$

C3^{0.20} Во сколько раз изменится это значение при уменьшении длины волны в два раза?

То есть, $I \sim \lambda^{-2}$. Тогда при уменьшении длины волны в два раза интенсивность увеличивается в 4 раза.

D1^{0.20} Найдите фокусное расстояние F зеркала.

Посчитаем фокусное расстояние. Из чертежа ниже видно, что оно равно $\frac{1}{2}R$



D2^{1.30} Оцените размер пятна d в фокальной плоскости зеркала, для двух диаметров зеркала: $D_1 = 1$ см, $D_2 = 15$ см.

Первый эффект: дифракционное размытие. Тогда радиус пятна $r_D = \frac{\lambda R}{2D}$.

Второй эффект: абберация. Из чертежа видно, что

$$\begin{aligned} H &= R \sin \varphi \\ H + r &= R \tan 2\varphi \left(\frac{1}{2} - (1 - \cos \varphi) \right) \\ r &= R \tan 2\varphi \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \right) - R \sin \varphi \\ r_A &\approx \frac{1}{2} \varphi^3 R = \frac{1}{2} (D/R)^3 R = \frac{D^3}{2R^2}. \end{aligned}$$

Для D_1 реализуется дифракция. Для D_2 абберация. Надо посчитать.

D3^{0.80} Для этих двух диаметров зеркал ($D_1 = 1$ см, $D_2 = 15$ см) оцените интенсивность в фокусе.

Для дифракции считаем как раньше через энергию:

$$I \left(\frac{\lambda R}{2D} \right)^2 = I_0 \frac{D^2}{4},$$

$$I = I_0 \frac{D^4}{\lambda^2 R^2}.$$

Для аберрации посчитаем интенсивность в центре как отношение мощности к радиусу. Возьмём в центре диск радуса r , в этот диск попадают лучи из зеркала диаметром

$$d = (2rR^2)^{1/3}$$

.
Мощность, которая собирается этим зеркалом $I_0\pi d^2/4$. Интенсивность в этом диске вокруг центра:

$$I = \frac{I_0\pi(2rR^2)^{2/3}}{4\pi r^2} = I_0 \frac{2^{2/3}R^{4/3}}{4r^{4/3}}.$$

Видно, что в предельном переходе ответ стремится к бесконечности.

D4 ^{0.70}

Как найденные в прошлом пункте интенсивности в фокусе зависят от длины волны λ ?

Дифракция:

$$I \approx \frac{D^4}{\lambda^2} I_0$$

Второй случай: никто не знает. Но Зенькович говорит вот так:
Здесь же в фокус, точнее, в ту область, в которой дифрация усредняет интенсивности попадают только те лучи, которые падали под $\varphi < \varphi_{crit}$, где φ_{crit} – угол, при котором смещение, вызванное аберрацией, меньше, чем дифракционное отклонение:

$$\frac{1}{2}\varphi_{crit}^3 R = \frac{1}{2}R\frac{\lambda}{D}$$

$$\varphi_{crit} \approx \left(\frac{\lambda}{D}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Площадь, лучи из которой упадут на зеркало под углом, меньшим φ_{crit} , равна $\pi R^2\varphi_{crit}^2$
Тогда запишем ЗСЭ:

$$I_0\pi R^2\varphi_{crit}^2 = I\frac{1}{4}\pi R^2\frac{\lambda^2}{D^2}$$

$$I \approx I_0\left(\frac{\lambda}{D}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

Тогда при уменьшении длины волны интенсивность увеличится в $2^{\frac{4}{3}} \approx 2.5$ раз. Это ответ на второй вопрос.

E1 ^{1.00}

Определите интенсивность нулевого максимума I_0 . Выразите ответ в общем виде через d и a . Укажите ответ для $d = 3a$.

Амплитуда падающей волны $E_S = \sqrt{(I_S)}$. В нулевой максимум попадают все волны, которые пропускаются щелью, причём с одинаковой фазой. Поэтому, амплитуда нулевого максимума

$$E_0 = a/dE_S,$$

интенсивность нулевого максимума

$$I_0 = (a/d)^2 I_S.$$

E2 ^{1.00}

Определите интенсивность I_h максимума с номером h . Выразите ответ в общем виде через d и a . Укажите ответ для $d = 3a$.

Направление на максимум h :

$$\sin \varphi = h\lambda/d.$$

Находим амплитуду максимума с номером h :

$$E_h = \frac{E_0}{a} \int_0^a e^{(-i2\pi/\lambda x \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{a} \int_0^a e^{(-i2\pi x/dh)} dx \sim E_S \frac{\sin (\pi ha/d)}{\pi h}.$$

Тут опущена фаза, которая не важна для интенсивности. В итоге:

$$I_h = E_h^2 = I_S \left(\frac{\sin(\pi h a / d)}{\pi h} \right)^2.$$

E3 1.00 Какая доля энергии β попадает во все максимумы на экране, кроме нулевого ($h \neq 0$)? Вычислите ответ для $d = 3a$.

Плоская волна в плоскости решетки является источником вторичных волн. То есть непр пропускающая часть $d - a$ поглощает не только энергию, которая идёт в нулевой максимум, но и всё то, что рассеивалось бы во все направления. Можно показать, что дополняющая решетка рассеивает туда же и столько же, сколько и начальная.

Поглощает в нулевом направлении:

$$I_0 = ((d - a)/d)^2 I_S,$$

Поглощает во всех направлениях (и столько же попадает в реальные максимумы):

$$\beta I_S.$$

Итого:

$$1 = (a/d)^2 + ((d - a)/d)^2 + 2\beta$$

$$\beta = \frac{a(d - a)}{d^2}$$

E4 1.00 Какая доля энергии γ поглощается не пропускающей частью дифракционной решеткой? Вычислите ответ для $d = 3a$.

Поглощается решеткой:

$$\gamma = ((d - a)/d)^2 + \beta = (d - a)/d.$$

Если что, суммарно на экран попадает доля энергии

$$(a/d)^2 + \beta = a/d,$$

Что равно $1 - \gamma$, как и должно быть из ЗСЭ.