

A1 ^{0.20} Найдите скорость бусинки сразу после соударения с подвижной стенкой.

При упругом отражении относительная скорость стенки и бусинки не меняется по модулю, но меняется по направлению, поэтому

$$v_1 = v_{\text{отн}} + u = v_0 + 2u$$

A2 ^{0.20} Найдите изменение расстояния между стенками за время между двумя последовательными соударениями бусинки с подвижной стенкой. Необходимо получить точную формулу.

Время между двумя последовательными соударениями проще всего вычислить, рассмотрев столкновение с симметричной стенкой, движущейся с той же скоростью. Отсюда

$$\Delta t = \frac{2L_0}{v_1 + u}$$

Найдём изменение расстояния

$$\Delta L = -u\Delta t = -\frac{2L_0 u}{v_0 + 3u}$$

A3 ^{0.40} Найдите выражение для адиабатического инварианта I для рассмотренной системы и определите скорость бусинки в момент, когда расстояние между стенками уменьшилось до значения L .

Из результатов предыдущих двух пунктов при условии $u \ll v$

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{2u}{v_0 + 3u} \approx -\frac{\Delta v}{v}$$

откуда после интегрирования

$$Lv = \text{const} = L_0 v_0$$

Учитывая физический смысл адиабатического инварианта

$$I = \frac{L_0 v_0}{\pi}$$

B1 ^{0.40} Выразите отношение масс M/m через u , v_0 и k .

Максимальная скорость лёгкой частицы достигается в момент, когда тяжёлая останавливается. Из ЗСЭ

$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k^2 mv_0^2}{2}$$

откуда

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{v_0}{u}\right)^2 (k^2 - 1)$$

B2 ^{0.80} Через какое время тяжёлая частица остановится? Ответ выразите через L_0 , v_0 , u и k .

Найдём из ЗСЭ скорость тяжёлой частицы как функцию расстояния x между ней и стенкой. Из условия сохранения адиабатического инварианта для лёгкой частицы

$$v(x) = \frac{v_0 L_0}{x}$$

Тогда из ЗСЭ с учётом того, что скорость тяжёлой частицы $v_T = -\frac{dx}{dt}$ получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{M} \left(k^2 - \left(\frac{L_0}{x}\right)^2\right) = \frac{u^2}{k^2 - 1} \left(k^2 - \left(\frac{L_0}{x}\right)^2\right)$$

откуда

$$dt = -\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k^2 u} \frac{k^2 x dx}{\sqrt{k^2 x^2 - L_0^2}}$$

Интегрируя

$$t = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2 u} \int_0^{L_0^2(k^2-1)} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{L_0}{u} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

С1 0.40

Получите выражение для кинетической энергии системы. Ответ выразите через $M, m, x, \dot{x}, v_0$ и L_0 .

Учитывая покой системы, центр масс неподвижен.Значит, кинетическая энергия тяжёлых частиц может быть выражена через приведённую массу μ и их относительную скорость

$$E_M = \frac{M\dot{x}^2}{4}$$

Кинетическая энергия лёгкой частицы может быть найдена из условия сохранения адиабатического инварианта

$$E_m = \frac{mv_0^2 L_0^2}{2x^2}$$

С2 0.20

Получите выражение для потенциальной энергии системы. Ответ выразите через F и x .

Взаимодействия лёгкой частицы с обеими тяжёлыми можно представить как взаимодействие самих тяжёлых частиц. С учётом притяжения и постоянства силы

$$W_p = Fx + C$$

С3 0.50

При каком значении x система находится в положении равновесия? Ответ выразите через M, m, v_0, L_0 и F .

Из ЗСЭ

$$E_m + E_M + W_p = E_0$$

отсюда

$$\frac{M\dot{x}^2}{4} + \frac{mv_0^2 L_0^2}{2x^2} + Fx = const$$

В положении равновесия эффективный потенциал минимален.Дифференцируя

$$F = \frac{mv_0^2 L_0^2}{x^3}$$

откуда

$$x_0 = \left(\frac{mv_0^2 L_0^2}{F}\right)^{\frac{1}{3}}$$

С4 0.40

Найдите циклическую частоту малых колебаний системы вблизи положения равновесия. Ответ выразите через M, m, v_0, L_0 и F .

Вычислим вторую производную эффективного потенциала

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dx^2} = \frac{3mv_0^2 L_0^2}{x_0^4}$$

после чего получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{M\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{eff}}{dx^2} = C$$

Откуда после дифференцирования

$$\omega_0^2 = \frac{6mv_0^2 L_0^2}{M} \left(\frac{F}{mv_0^2 L_0^2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Д1 1.00

Можно показать, что в рассматриваемом приближении квадрат компоненты v_x скорости шайбы зависит от координаты x как $v_x^2 = A + Bx + Cx^2$. Выразите A, B и C через v_0, α, a, b и r .

Для движения вдоль оси y сохраняется адиабатический инвариант

$$v_y y = const$$

С учётом начальных условий

$$v_y^2 = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha) y_0^2}{y^2} = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha) \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

учитывая малость x и ЗСэ

$$v_x^2 = v_0^2 - v_y^2 = v_0^2 \left(\sin^2(\alpha) + \frac{r^2}{a^2} \cos^2(\alpha) \right) - \left(\frac{v_0 \cos(\alpha) x}{a} \right)^2$$

Таким образом

$$A = v_0^2 \left(\sin^2(\alpha) + \frac{r^2}{a^2} \cos^2(\alpha) \right)$$

$$B = 0$$

$$C = - \left(\frac{v_0 \cos(\alpha)}{a} \right)^2$$

D2 ^{0.60}

Найдите максимальное значение координаты x шайбы в процессе движения. Ответ выразите через v_0 , α , a , b и r .

Из ЗСЭ получим

$$v_x^2 = v_0^2 - v_y^2 = v_0^2 \left(\sin^2(\alpha) + \frac{r^2}{a^2} \cos^2(\alpha) \right) - \left(\frac{v_0 \cos(\alpha) x}{a} \right)^2$$

При максимуме x левой части стоит ноль, поэтому

$$x_{max} = \sqrt{a^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha)}$$

D3 ^{0.60}

Через какое время после запуска шайба впервые окажется в точке с координатой $x = 0$? Какое условие на соотношение a/b должно выполняться для применимости полученного результата?

Движение вдоль оси x представляет собой гармонические колебания с циклической частотой $\frac{v_0 \cos(\alpha)}{a}$,поэтому

$$t = \frac{a}{v_0 \cos(\alpha)} \left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{r}{\sqrt{a^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha)}} \right)$$

E1 ^{0.50}

Найдите адиабатический инвариант I для гармонического осциллятора с массой m , колеблющегося с циклической частотой ω_0 и амплитудой A .

Площадь фазовой траектории в случае гармонического осциллятора - это площадь эллипса с полуосями A и $m\omega_0 A$. Таким образом

$$I = \frac{mA^2\omega_0}{2}$$

E2 ^{0.40}

Пусть при неизменном угле наклона длину маятника адиабатически медленно увеличили до L . Найдите новую амплитуду колебаний маятника φ . Ответ выразите через φ_0 , α_0 , L_0 и L .

Циклическая частота такого маятника следующая

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin(\alpha)}{L}}$$

А адиабатический инвариант

$$I = \frac{mL^2\varphi^2}{2} \sqrt{\frac{g \sin(\alpha)}{L}}$$

Таким образом, при неизменном угле

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{3}{4}}$$

E3^{0.40} Пусть при неизменной длине маятника угол наклона адиабатически медленно увеличили до значения α . Найдите новую амплитуду колебаний φ .
 Ответ выразите через φ_0 , α_0 , α и L_0 .

Используя результат предыдущего пункта

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

F1^{0.20} Выразите вектор магнитного момента кольца $\vec{m}$ через q, M и вектор его момента импульса относительно центра $\vec{L}$.

По определению

$$\vec{L} = \int [\vec{r} \times \vec{v}] dm$$

Учитывая, что кольцо однородное и равномерно заряжено по периметру

$$\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

F2^{0.20} Покажите, что модуль момента импульса L остаётся постоянным.

Момент сил ,действующих на магнитный момент в магнитном поле

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \frac{q}{2m} [\vec{L} \times \vec{B}]$$

Отсюда следует, что производная вектора момента импульса перпендикулярна ему, откуда и следует, что момент импульса по модулю сохраняется.

F3^{0.70} Покажите, что ось кольца испытывает прецессию и найдите вектор угловой скорости $\vec{\Omega}$ этой прецессии. Ответ выразите через q , M и $\vec{B}_0$. Считайте, что $\Omega \ll \omega$.

Пусть угловая скорость вращения вектора момента импульса равна $\vec{\Omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \frac{q}{2m} [\vec{L} \times \vec{B}]$$

Откуда

$$[\vec{\Omega} + \frac{q}{2m} \vec{B} \times \vec{L}] = 0$$

и окончательно

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$$

F4^{0.70} Магнитное поле адиабатически медленно начинают уменьшать со скоростью $\dot{B}$. Найдите момент сил (модуль и направление), действующих на кольцо со стороны вихревого электрического поля. В этом и следующем пункте считйте, что $\alpha_0 = \pi/2$.

Есть только одна компонента момента сил - направленная вдоль магнитного поля

Вихревое поле,возникающее на расстоянии r от оси, проходящей через центр вдоль магнитного поля

$$E = -\frac{\dot{B}r}{2}$$

$$M_z = \int E(r) r dq = - \int \frac{\dot{B} r^2 dq}{2} = -\frac{\dot{B} I_z q}{2m}$$

F5^{0.70}

Значение магнитного поля уменьшилось до $\vec{B}_1$. Найдите угол между осью вращения и направлением магнитного поля. Изменение угла можно считать малым.

Момент импульса кольца складывается из быстрой компоненты вращения, а также из компоненты, связанной с прецессией. Тогда производная момента импульса в проекции на ось Z следующая

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \dot{\Omega} - I_r \omega \dot{\alpha} = -\frac{\dot{B} I_z q}{2m} - I_r \omega \dot{\alpha} = M_z = -\frac{\dot{B} I_z q}{2m}$$

Откуда

$$\dot{\alpha} = 0$$

Таким образом, угол α при медленно уменьшении поля остаётся постоянным и ответ

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

G1^{0.20}

Рассмотрим для начала плоское движение в однородном магнитном поле с индукцией B_0 . Пусть его производная по времени равна $\dot{B}$ и изменение происходит адиабатически медленно. Начальная скорость частицы равна v_0 , её масса M , а заряд q . Выразите тангенциальное ускорение частицы $\dot{v}_\perp$ через M, q, v_0, B_0 и $\dot{B}$.

Используя полученные ранее выражения для вихревого электрического поля

$$\dot{v}_\perp = \frac{q m v_\perp \dot{B}}{2 q B m} = \frac{v_\perp \dot{B}}{2 B}$$

G2^{0.50}

Пусть магнитное поле медленно изменило величину до значения B . Выразите скорость частицы $v_\perp$ через v_0, B_0 и B .

После интегрирования полученного выражения в предыдущем пункте

$$\frac{v_\perp^2}{B} = \text{const}$$

Откуда

$$v_\perp = v_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}}$$

G3^{1.00}

Пусть угол наклона винтовой линии равен α и мал. Покажите, что усреднённая по времени сила, действующая в направлении магнитного поля на заряд эквивалентна взаимодействию магнитного диполя с неоднородным полем. Найдите величину силы $F_\parallel$. Ответ выразите через m, v, q, B_z и $\frac{dB_z}{dz}$, где ось z сонаправлена с магнитным полем.

Указание: Мы уже упоминали, что любые заряженные частицы обладают магнитным моментом. Поэтому вам достаточно рассмотреть контур с постоянным током, движущийся в неоднородном магнитном поле.

Рассмотрим проводник с током I , текущим по правилу правого винта. Рассмотрим замкнутую поверхность имеющую два сечения в форме проводника. По теореме Гаусса поток через неё равен нулю, поэтому

$$S dB_z = d\Phi = dz \int B_\perp dl$$

Для F_z имеем

$$F_z = I \int B_\perp dl = I s \frac{dB_z}{dz} = m_z \frac{dB_z}{dz}$$

Момент импульса частицы направлен против магнитного поля, найдём его по модулю

$$L_z = -m v_\perp r = -\frac{m^2 v_\perp^2}{q B}$$

$$m_z = \frac{q}{2m} L_z = -\frac{m v_\perp^2}{2B}$$

И окончательно

$$F_z = -\frac{m v_\perp^2}{2B} \frac{dB_z}{dz}$$

G4 ^{0.70} Используя результаты предыдущих пунктов, определите зависимость угла α от величины магнитного поля B Ответ выразите через α_0 , B_0 и B .

Из закона сохранения энергии следует, что модуль скорости частицы не меняется. Перпендикулярная компонента скорости выражается как

$$v_{\perp} = v \cos \alpha.$$

Из инварианта, найденного в предыдущем пункте

$$v_{\perp}^2 = v_{0\perp}^2 \frac{B}{B_0}.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}}.$$

G5 ^{0.60} Выразите максимально возможное значение угла α через r_m .

Для возможности работы магнитного зеркала необходимо, чтобы $\sin(\alpha)$ принимал любые значения вплоть до нуля. Тогда

$$\cos(\alpha_0) \geq \frac{1}{\sqrt{r}}$$

H1 ^{0.40} Получите точную формулу зависимости индукции магнитного поля от координаты x . Начало координат находится по центру между витками, ось x направлена вдоль магнитного поля. Найдите, учитывая малость некоторых параметров, также максимальное и минимальное значение суммарной индукции магнитного поля на оси витков.

Из закона Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{r} \times \vec{r}]}{r^3}$$

с учётом одинаковой направленности сил тока получим

$$B(x) = B_0 + \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (H - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (H + x)^2}} \right)$$

Максимум данной функции достигается в центрах витков, а минимум - при $x = 0$. Отсюда с учётом малости полей витков

$$B_{min} = B_0$$

$$B_{max} = B_0 + \frac{\mu_0 I}{2R}$$

H2 ^{0.60} Найдите коэффициент зеркальности r_m для данной системы. Учтите здесь и в дальнейшем, что $H \gg R$.

$$r = 1 + \frac{\mu_0 I}{2B_0 R}$$

H3 ^{1.00} Качественно нарисуйте силовую линию, проходящую через плоскость кольца на малом расстоянии $R_0 \ll R$ от его оси в координатах $r'(x)$, где r' – расстояние до оси симметрии системы. Найдите максимальное значение r' и выразите ответ в виде: $r' \approx A + B(r - 1)$.

Рассмотрим трубку силовых линий, симметричную относительно оси системы и ограниченную линиями, проходящими на расстоянии R_0 через плоскость кольца. Поскольку поток магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю, можем написать соотношение

$$B_{max} R_0^2 = B_{min} r'^2.$$

Отсюда

$$r' = R_0 \sqrt{\frac{B_{max}}{B_{min}}} = R_0 \sqrt{1 + \frac{\mu_0 I}{2B_0 R}}$$

Н4^{0.50}

Найдите максимальное значение угла α в процессе движения, если отражения от магнитных зеркал происходит в плоскости колец. Считайте, что точки разворота частицы находятся достаточно близко к центрам колец. Учтите малость r_m .

$$\cos^2(\alpha_0) = \frac{1}{r}$$

Поэтому

$$\sin^2(\alpha_{max}) = 1 - \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2B_0 R}$$

Или

$$\alpha_{max} \approx \sqrt{\frac{\mu_0 I}{2B_0 R}}$$