

A1 ^{0.30} Одна из моделей диэлектриков состоит в следующем: большое количество маленьких проводящих шариков радиусом R заполняют пространство с концентрацией n , так, что $R^3 n \ll 1$. Определите, на сколько диэлектрическая проницаемость ε отличается от единицы.

Проводящий шар, помещенный во внешнее поле, приобретает дипольный момент. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ и дипольный момент шара $\vec{p}$ связаны соотношением

$$\vec{E} = -\frac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{p}}{4\pi R^3 \varepsilon_0}.$$

Вектор поляризации такой среды

$$\vec{P} = n\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 n\vec{E}.$$

Отличие диэлектрической проницаемости от единицы:

$$\varepsilon - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 4\pi n R^3.$$

B1 ^{0.30} Уединённый диэлектрический шар радиуса R поляризован так, что внутри него напряженность электрического поля однородна и равна $\vec{E}_{in}$. Определите напряженность электрического поля $\vec{E}_{out}(\vec{r})$, которое создаёт шар снаружи в точке $\vec{r}$. Радиус-вектор $\vec{r}$ проводится из центра шара.

Дипольный момент $\vec{p}$ шара связан с напряженностью однородного поля внутри $\vec{E}_{in}$:

$$\vec{p} = -4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_{in}.$$

Снаружи – поле диполя:

$$\vec{E}_{out} = -R^3 \left(\frac{3(\vec{E}_{in}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{E}_{in}}{r^3} \right)$$

B2 ^{1.00} Во внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ поместили диэлектрический шар радиуса R . Напряженность электрического поля внутри шара стала равна $\vec{E}_0/n$. Определите диэлектрическую проницаемость материала шара ε .

Шар поляризуется так, что вектор поляризации $\vec{P}$ внутри шара константа. Эти заряды создают поле:

$$\vec{E}_{пол} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Поле внутри $\vec{E}_1$ есть сумма внешнего поля (до внесения шара) $\vec{E}_0$ и поля поляризационных зарядов:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{n} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{пол} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Диэлектрическая проницаемость определяется следующим выражением:

$$\varepsilon \vec{E}_1 = \vec{E}_1 + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

Подставив всё друг в друга, получаем ответ

$$\varepsilon = 3n - 2.$$

B3 ^{0.30} Если поместить неполярную частицу (например атом вещества) в электрическое поле $\vec{E}'$, то она приобретёт дипольный момент $\vec{p}$. Для малых полей эта зависимость линейная:

$$\vec{p} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}'.$$

Коэффициент β называется «поляризуемость». Укажите поляризуемость β для проводящего шара.

Для проводящего шара

$$\beta = 4\pi R^3.$$

C1 0.50 Если поместить атом водорода (который сам по себе не обладает дипольным моментом) в переменное электрическое поле $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, то он поляризуется в основном за счёт того, что электрон массой m_e и зарядом q_e смещается под действием вынуждающей силы внешнего поля. То есть электрон совершает колебания возле положения равновесия (ядро атома). Определите, как зависит положение центра облака электрона от времени $x(t)$, если собственная частота таких колебаний электрона ω_0 ?

Собственные колебания определяются некоторой возвращающей силой $F(x) = -kx$, которая определяет уравнение свободных колебаний:

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Поэтому эта возвращающая сила выражается через собственную частоту: $F(x) = -m\omega_0^2 x$.

В случае вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = q_e E_0 \cos(\omega t)$$

ищем решение в виде колебаний с частотой вынуждающей силы ω

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Подставив $x(t)$ в уравнение вынужденных колебаний найдем амплитуду. Окончательно, закон движения

$$x(t) = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

C2 0.30 Если поместить указанный атом водорода в постоянное электрическое поле E_0 , то он будет поляризоваться. Величина поляризации будет определяться собственной частотой колебаний ω_0 , которую можно оценить из следующих соображений: это частота электромагнитной волны, которая при поглощении атомом водорода ионизует его из основного состояния. Известно, что длина волны этого излучения $\lambda = 91.1$ нм. Оцените поляризуемость β атома водорода.

В постоянном поле E_0 у атома водорода возникает дипольный момент

$$p = q_e x_0 = \frac{q_e^2 E_0}{m\omega_0^2}.$$

Собственная частота колебаний связана с длиной волны падающего излучения

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

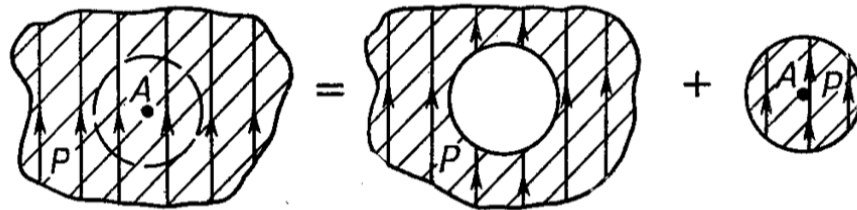
Поляризуемость

$$\beta = \frac{q_e^2}{m\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 = 7.4 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

C3 0.30 Определите на сколько диэлектрическая проницаемость газообразного водорода отличается от единицы при атмосферном давлении и температуре $t = 0^\circ\text{C}$. Используйте значение поляризуемость атома водорода из предыдущего пункта. Для разреженных газов можно считать, что поле в веществе E и поле которое действует на одну молекулу E' совпадают.

$$\varepsilon - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{pn}{\varepsilon_0 E} = \beta n = \frac{\beta p_A}{kT} = 2.0 \cdot 10^{-4}.$$

D1 0.50 Внутри сплошного однородного диэлектрика напряженность электрического поля равна $\vec{E}$, вектор поляризаций равен $\vec{P}$. Внутри диэлектрика вырезали сферическую полость. Определите напряженность электрического поля в веществе $\vec{E}_h$.



Поле внутри полости

$$\vec{E}_h = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

D2 ^{1.00} Используя указанную выше модель найдите, на сколько диэлектрическая проницаемость жидкости ϵ отличается от единицы. Концентрация молекул n , поляризуемость β .

В указанной выше модели Клаузиуса-Моссотти дипольный момент атома p определяется полем $E' = E_h$, поэтому вектор поляризации P равен:

$$P = pn = \beta\epsilon_0 n E_h.$$

Поле E_h и поле в диэлектрике E связаны соотношением

$$\vec{E}_h = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Диэлектрическую проницаемость найдём из выражения

$$\epsilon - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}.$$

Объединяя всё это вместе получим ответ

$$\epsilon - 1 = \frac{\beta n}{1 - \beta n/3}.$$

D3 ^{0.50} Вещество Refrigerant-10 в газообразном виде имеет диэлектрическую проницаемость $\epsilon_g = 1.0030$ при температуре $t_g = 105^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении. Определите диэлектрическую проницаемость ϵ_l данного вещества в жидком виде.

В газе

$$\epsilon_g - 1 = \beta n_g.$$

В жидкости

$$\epsilon_l - 1 = \frac{\beta n_l}{1 - \beta n_l/3}.$$

Отношение коэффициентов

$$\frac{\beta n_l}{\beta n_g} = \frac{\rho_{R10}}{\rho_g} = \frac{\rho_{R10} R T}{p_A \mu_{R10}}.$$

$$\epsilon_l = 1 + \left(\frac{p_A \mu_{R10}}{(\epsilon_g - 1) \rho_{R10} R T} - \frac{1}{3} \right)^{-1} = 2.44.$$

D4 ^{0.50} Для воды при температуре $t_1 = 145^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon_1 = 1.00705$. Оцените диэлектрическую проницаемость воды ϵ_2 при температуре $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Сравните результат полученный из этой модели с реальным значением диэлектрической проницаемости воды. Если он не сходится, укажите возможную причину.

При температуре $t_1 = 145^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении вода находится в газообразном состоянии. Поэтому

$$\varepsilon_1 - 1 = \beta n_1.$$

При $t_2 = 20^\circ\text{C}$ вода жидкая:

$$\varepsilon_2 - 1 = \frac{\beta n_2}{1 - \beta n_2/3}.$$

Отношение коэффициентов

$$\frac{\beta n_l}{\beta n_g} = \frac{\rho_w}{\rho_g} = \frac{\rho_w R T}{p_A \mu_w}.$$

$$\varepsilon_2 = 1 + \left(\frac{p_A \mu_w}{(\varepsilon_1 - 1) \rho_w R T_1} - \frac{1}{3} \right)^{-1} = -2.84.$$

Теория не совпадает с реальностью, потому, что не применима: молекула воды полярная, а теория для неполярных веществ из неполярных атомов/молекул.

Е1 1.00

Определите разницу $\varepsilon - 1$ для такого вещества с концентрацией молекул n при температуре T .

Можно считать, что температура достаточно велика, а напряженность электрического поля не велика. Наведённый дипольный момент не учитывайте.

Энергия диполя в электрическом поле

$$U = -(\vec{p}_0, \vec{E}) = -p_0 E \cos \theta,$$

где θ – угол между $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

Доля диполей, ориентированных под углом θ в некотором направлении, находится из распределения Больцмана:

$$w(\theta) = A e^{-U/kT} = A \exp\left(\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right) \approx A \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right).$$

Вектор поляризации

$$P = n \frac{\int_0^\pi (p_0 \cos \theta) \cdot w(\theta) \cdot (2\pi \sin \theta d\theta)}{\int_0^\pi w(\theta) \cdot (2\pi \sin \theta d\theta)}.$$

В итоге эти интегралы сводятся к

$$P = n \frac{\int_0^\pi p_0^2 E / kT \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{n p_0^2 E}{3 k T}.$$

Ответ

$$\varepsilon - 1 = \frac{n p_0^2}{3 \varepsilon_0 k T}$$

Е2 1.00

По имеющимся данным таблицы определите дипольный момент молекулы p_0 и поляризуемость β для воды. В таблице указана зависимость диэлектрической проницаемости воды от её температуры T и давления p .

Заметим, что концентрация постоянно и равна $n = 1.40 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Для полярного диэлектрика вклад от наведённых диполей и собственных складывается

$$\varepsilon - 1 = \frac{n p_0^2}{3 \varepsilon_0 k T} + \frac{\beta n}{1 - \beta n/3}.$$

Данную зависимость можно лианеризовать координатами $\varepsilon - 1$ от $1/T$, тогда коэффициент наклона

$$\frac{d(\varepsilon - 1)}{d(1/T)} = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0k} = 1.5052\text{ К}^{-1},$$

свободный член

$$(\varepsilon - 1)_0 = \frac{\beta n}{1 - \beta n/3} = 16.666 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда

$$p_0 = 6.3 \cdot 10^{-30}\text{ Кл} \cdot \text{м},$$

$$\beta = 1.2 \cdot 10^{-29}\text{ м}^3.$$