

A1^{0.50} Покажите, что суммарная сила, действующая на кольцо, определяется выражением:

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot f\left(\frac{v(t)}{\omega(t)r}\right) \hat{x},$$

где

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} d\theta$$

Обозначим скорость кусочка, видимого из центра кольца под углом $d\theta$ как $\vec{u}$. Так как тело движется, а коэффициент трения не зависит от направления движения, то сила трения, действующая на выбранный кусочек, направлена противоположно его скорости. Тогда её можно записать в таком виде:

$$d\vec{F}_{fric} = -\frac{\vec{u}}{u} \mu dN = -\frac{(v - \omega r \sin \theta) \hat{x} + (\omega r \cos \theta) \hat{y}}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2 - 2v\omega r \sin \theta}} \mu mg \frac{d\theta}{2\pi}$$

Полная сила трения получается при интегрировании выражения вдоль всего кольца, т. е. в диапазоне углов от 0 до 2π .

Несложно заменить, что $F_{tot\ y} = 0$, так как всё выражение меняет знак при замене $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Физически это соответствует тому, что силы, действующие на кусочки, симметричные относительно оси OX, проходящей через центр кольца, компенсируют у-составляющие друг друга.

Разделив числитель и знаменатель на ωr , приходим к искомому выражению.

A2^{0.50} Покажите, что суммарный момент, действующий на кольцо, равен:

$$\tau_{tot} = -\mu mgr f\left(\frac{\omega(t)r}{v(t)}\right)$$

$$d\vec{\tau} = [\vec{r} \times d\vec{F}_{fric}] = -\frac{[\vec{r} \times \vec{u}]}{u} \mu g dm$$

В векторное произведение входит только компонента $\vec{u}$, перпендикулярная радиусу, т. е. $u_\tau = \omega r - v \sin \theta$. подставляя всё в итоговое выражение, получим:

$$\vec{\tau} = -\mu mgr \int_0^{2\pi} \frac{\omega r - v \sin \theta}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2 - 2v\omega r \sin \theta}} \frac{d\theta}{2\pi},$$

откуда после сокращения на v получится искомая формула.

A3^{0.10} Докажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\mu g \cdot f\left(\frac{v}{\omega r}\right) \\ \dot{\omega} r &= -\mu g \cdot f\left(\frac{\omega r}{v}\right) \end{aligned}$$

Векторная сумма сил всегда сонаправлена скорости, поэтому $|\dot{\vec{v}}| = |\dot{v}|$, то есть тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -\mu mg f\left(\frac{v}{\omega r}\right) \\ m\dot{\omega} r^2 &= -\mu mgr f\left(\frac{\omega r}{v}\right), \end{aligned}$$

откуда после сокращения на m и mr соответственно получатся искомые равенства.

B1^{0.50} Докажите:

- a) $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{2}{\pi}$, $f(\infty) = 1$
b) $f(a)$ строго возрастает при $a \geq 0$

a)

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\sin \theta \, d\theta = 0 \\
f(1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \sin \theta}{\sqrt{2 - 2 \sin \theta}} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{2}} \, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \, d \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \\
f(\infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a - \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{da} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{a - \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} \right] \, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} - \frac{(a - \sin \theta)^2}{(1 + a^2 - 2a \sin \theta)^{3/2}} \right] \, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{(1 + a^2 - 2a \sin \theta)^{3/2}} \, d\theta > 0
\end{aligned}$$

B2^{0.30} Рассмотрим поведение параметра $a(t) = \frac{v(t)}{\omega(t)r}$. Покажите, что происходит с $a(t)$ (растёт/уменьшается/остаётся неизменным) в каждом из следующих случаев:

a) в некоторый момент $a(t) = 1$

b) в некоторый момент $a(t) < 1$

c) в некоторый момент $a(t) > 1$

$$\dot{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\omega r} \right) = \frac{\dot{v} \omega r - v \dot{\omega} r}{(\omega r)^2} = -\frac{\mu m g}{\omega r} \left(f(a) - a f \left(\frac{1}{a} \right) \right)$$

Анализируя данное выражение, получаем:

$$\begin{aligned}
f(a) - a f \left(\frac{1}{a} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - \sin \theta - a(1 - a \sin \theta)}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} \, d\theta = \\
&= \frac{a^2 - 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} \, d\theta
\end{aligned}$$

В области отрицательных значений подынтегральной функции знаменатель больше, чем в области положительных, поэтому интеграл всегда положителен. Таким образом:

$$\begin{aligned}
\text{sign}(\dot{a}) &= \text{sign}(1 - a); \\
\dot{a} = 0 &\Rightarrow a = 1.
\end{aligned}$$

Заметим, что ответ можно было бы получить и из более простых логических соображений

Ответ: a) $a = 1 \Rightarrow a$ — постоянна;
b) $a < 1 \Rightarrow a$ — возрастает;
c) $a > 1 \Rightarrow a$ — убывает.

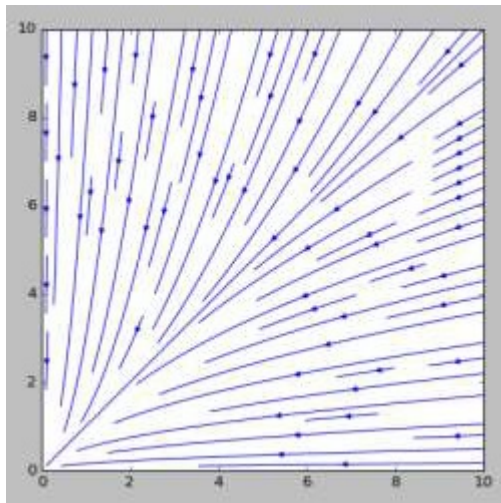
B3^{0.60} Нарисуйте качественно на графике, осями которого являются v и ωr , траектории, отображающие разное движение кольца, то есть при заданных v_0 и $\omega_0 r$ нарисуйте, как они будут изменяться с течением времени.

Необходимо нарисовать хотя бы одну траекторию на каждый пункт предыдущего задания. Кроме того, нарисуйте траекторию, проходящую через точку $(v_0, 0)$ и еще одну, начинающуюся в точке $(0, \omega_0 r)$

Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Как можно было заметить из предыдущего пункта, все траектории асимптотически стремятся к единице. При этом, $\dot{v} < 0$ и $\dot{\omega} r < 0$. Приведём искомый график:

Ответ:



B4 ^{0.10} Вычислите мгновенную мощность, которая расходуется, когда есть только угловая скорость ω ($v = 0$), и отдельно, когда присутствует только линейная v ($\omega = 0$).

В случае отсутствия вращательного движения сила трения, действующая на каждый кусочек, направлена против оси X. Тогда:

$$P_v = -F_{tot}v = -\mu mg v$$

В случае отсутствия поступательного движения

$$P_\omega = -\tau_{tot}\omega = -\mu mg \omega r$$

Более строгие рассуждения будут приведены в пункте B5.

Ответ:

$$P_v = -\mu mg v$$
$$P_\omega = -\mu mg \omega r$$

B5 ^{0.60} Для заданных v и ω вычислите мгновенную мощность P , которая расходуется на трение в данный момент времени. Дайте ответ в виде интеграла с безразмерной переменной.

$$P = \int \vec{u} \cdot d\vec{F}_{fric} = -\mu mg \int_0^{2\pi} \vec{u} \cdot \frac{\vec{u}}{u} \frac{d\theta}{2\pi} = -\mu mg \omega r \int_0^{2\pi} \frac{u}{\omega r} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Подставляя выражение для скорости кусочка $\vec{u}$:

Ответ:

$$P = -\mu mg \omega r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\omega r}\right)^2 - 2 \left(\frac{v}{\omega r}\right) \sin(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

B6 ^{1.20} Предположим, что кольцу придали определённую начальную кинетическую энергию E_0 . Каково должно быть соотношение $a_0 = \frac{v_0}{\omega_0 r}$, при котором кольцо будет двигаться максимальное время?

Подсказка: Постарайтесь дать ответ на предыдущий пункт при помощи только E_0 и a_0 (и других данных из этого пункта), исключив из уравнения v и ω

Воспользуемся подсказкой :)

$$E = \frac{m}{2} [v^2 + (\omega r)^2] = \frac{m}{2} (\omega r)^2 (a^2 + 1)$$
$$m \omega r = \sqrt{2mE} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$
$$P(a, E) = -\mu g \sqrt{2mE} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{2a}{1 + a^2} \sin(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Анализировать последнее выражение можно несколькими способами. Например, взяв частную производную по a

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(P(a, E) \right) = \mu g \sqrt{2mE} \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$$

где интеграл в правой части совпадает с интегралом в *B2* и имеет положительные значения при любых a . Так как при $a < 1$ функция P убывает, а при $a > 1$ — возрастает, то её минимум реализуется в $a_0 = 1$.

Из того факта, что мощность P всегда отрицательна и стремится к $P \rightarrow 0$ только при $E \rightarrow 0$ очевидно, что движение может закончиться только при $E = 0$. Также, следует заметить, что движение с параметром $a = 1$ устойчиво, а значит, при $a_0 = 1$ всё движение будет происходить с минимально возможной мощностью, т. е. пройдет максимально возможное время при заданной начальной энергии $E = E_0$

Ответ:

$$a_0 = 1$$

B7^{0.50}

Каково максимальное время движения при начальной энергии E_0 ?

Как мы выяснили в предыдущем пункте, движение, продолжающееся максимальное время происходит при $a = 1$. Тогда время можно найти из уравнения:

$$\dot{E} = P(1, E) = -\mu g \sqrt{2mE} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Интеграл вычисляется аналогично пункту *B1* с помощью тригонометрической замены, указанной в условии.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Разделяя переменные, получим

$$\int_{E_0}^0 \frac{dE}{\sqrt{E}} = -\mu g \sqrt{m} \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^{\tau} dt$$

Из чего несложно выразить ответ.

Ответ:

$$\tau = \frac{\pi}{2\mu g} \sqrt{\frac{E_0}{m}}$$

C1^{0.60}

Напишите заново уравнения движения из пункта A3 таким образом, чтобы они подходили под новое условие.

Вывод уравнения для величины силы трения и момента силы трения остаётся тем же, однако, теперь полная реакция опоры равна $N = mg \cos \alpha$. Таким образом, суммарный момент, действующий на кольцо, просто умножится на $\cos \alpha$.

С уравнениями для проекций сил, лежащих в плоскости движения немного сложнее: суммарная сила теперь не сонаправлена со скоростью кольца. Обозначив $\cos \varphi = (\vec{v}, \widehat{\vec{g}_\tau})$, где $\vec{g}_\tau$ — составляющая вектора $\vec{g}$, лежащая вдоль плоскости, получим уравнения:

Ответ:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\mu g f\left(\frac{v}{\omega r}\right) \cos \alpha + g \sin \alpha \cos \varphi \\ \dot{\omega} r &= -\mu g f\left(\frac{\omega r}{v}\right) \cos \alpha \end{aligned}$$

C2^{2.00}

При заданных начальных ω_0 и $v_0 = 0$ нарисуйте все возможные семейства траекторий движения кольца в координатах $(v, \omega r)$ (для каждого типа кривых нарисуйте свой график). Укажите следующие составляющие:

а) соответствующие значения параметров;

б) конечные точки (в которые траектории приходят за конечное или бесконечное время) в плоскости $(v, \omega r)$. Здесь достаточно написать для каждой составляющей, что она стремится к нулю/ стремится к бесконечности/ равна или стремится к какой-то положительной величине.

Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Так как при начале движения кольцо имеет нулевую скорость $v_0 = 0$, то в предыдущем уравнении на протяжении всего движения $\cos \varphi = 0$. $\dot{\omega} < 0$, т.е. $\omega \rightarrow 0$. В зависимости от величины $\tan \alpha$ возможны различные случаи: $v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \text{const}$ и $v \rightarrow \infty$. Выбор одного из этих случаев определяется знаком $\dot{v}$ при $\frac{v}{\omega r} \rightarrow \infty$. Искомые траектории приведены на рисунках.

