

A0^{0.20} Определите размер решетки L , температуру T и магнитное поле h , заданные в программе в качестве параметров по умолчанию.

Запустив программу, с помощью команды 7 находим

$$L = 100; \quad T = 10.0; \quad h = 0.$$

A1^{0.40} Как время исполнения программы τ зависит от размера сетки L и от числа повторений алгоритма I ? Сколько исполнялось $I = 500$ шагов алгоритма на решетке размера $L = 1000$?

На каждом шаге алгоритма совершается L^2 операций. Поэтому время пропорционально $\tau \sim IL^2$. При $L = 100$ $I = 100$ операций выполняется за 2 минуты. Тогда в условиях задачи

$$\tau = 2 \text{ мин} \times 5 \times 10^2 = 1000 \text{ мин} \approx 17 \text{ часов}.$$

A2^{0.50} Пронаблюдайте, как распределение магнитных моментов меняется в зависимости от температуры. Оцените температуру T_c , при которой происходит фазовый переход.

При больших температурах магнитные моменты расположены хаотично. При низких температурах практически все моменты направлены в одну сторону. В точке фазового перехода соседние моменты начинают группироваться в "капли" сонаправленных магнитных моментов. Это происходит при температуре порядка 2.5.

A3^{0.20} Какое число шагов алгоритма I требуется, чтобы от начального случайного распределения получить равновесное распределение при $T = 1.5$, $h = 0.1$? Размер решетки по умолчанию.

Запустив моделирование и посмотрев на график намагниченности от числа шагов, находим, что намагниченность сходится к среднему значению за $I \sim 50$ шагов.

A4^{0.70} В этой задаче придется много работать со случайными величинами. Чтобы получить разумные ответы, важно правильно оценивать случайные погрешности. В качестве примера рассмотрим сетку размера $L = 5$ при температуре $T = 3.66$. Как погрешность определения m^2 зависит от числа шагов алгоритма I ? Определите m^2 с погрешностью не выше 0.01.

Вся погрешность определения m^2 возникает из-за случайных отклонений. Это означает, что погрешность спадает с числом усредняемых слагаемых как $1/\sqrt{I}$. Тогда требуемое число шагов можно оценить как $I \sim 10^4$. Используя такое число шагов находим $m^2 = 0.205 \pm 0.010$. Запустив программу несколько раз, убеждаемся, что наша оценка погрешности действительно справедлива.

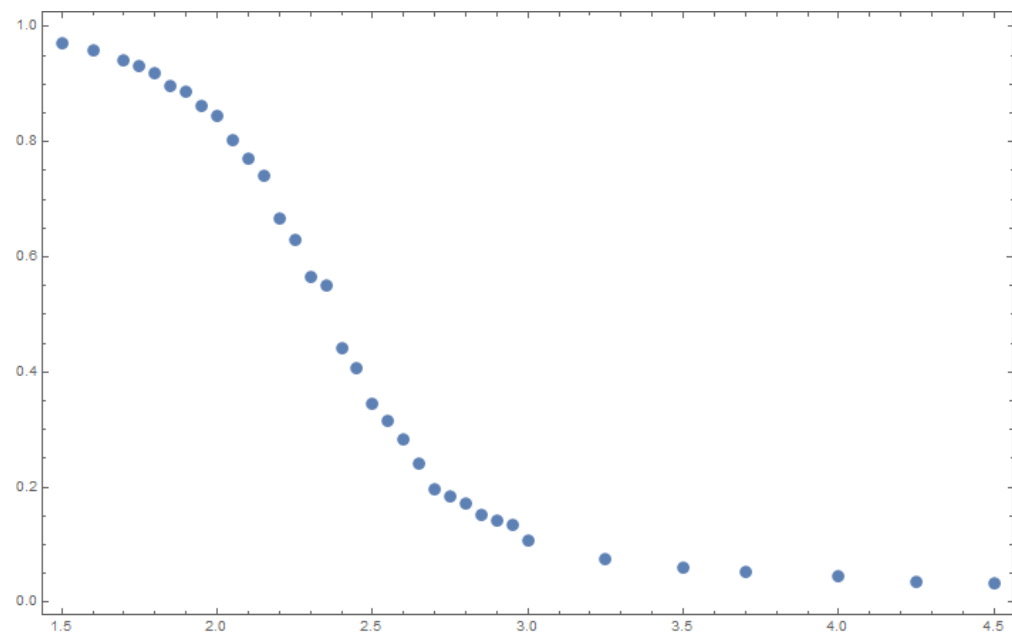
Ответ: $m^2 = 0.205 \pm 0.010$

B1^{0.50} Найдите значение U_0 параметра Биндера при $T \rightarrow 0$ и значение U_∞ при $T \rightarrow \infty$.

При $T \rightarrow 0$ практически все моменты сонаправлены и $\langle m^4 \rangle = \langle m^2 \rangle = 1$. Тогда $U_0 = 2/3$. При больших температурах направления всех магнитных моментов практически независимы. Поэтому намагниченность представляет собой сумму большого числа независимых величин, а значит распределена по Гауссу. Тогда $U_\infty = 0$. Эти же результаты можно получить из численного моделирования при достаточно малых и достаточно больших температурах.

B2^{1.00} Как средний квадрат намагниченности m^2 намагниченности зависит от температуры при $L = 10$? Постройте график в зависимости от температуры. Диапазон температур выберите так, чтобы график содержал все характерные особенности функции.

Снимем зависимость $m^2(T)$, используя для усреднения $I = 10^4$ шагов алгоритма в интервале температур $T \in [1.5, 4.5]$. Получим график



B3 4.00 Используя параметр Биндера, как можно точнее определите температуру T_c , при которой происходит фазовый переход. Оцените погрешность найденного значения T_c .

Построим график зависимости параметра Биндера от температуры для двух различных размеров решетки, например $L = 5$ и $L = 10$. Вблизи точки фазового перехода эти зависимости можно аппроксимировать линейными. Находя точку пересечения соответствующих прямых, получаем $T_c \approx 2.21$. Для того, чтобы добиться хорошей точности, каждую точку требуется измерять, усредняя по $I \sim 10^4$ итерациям алгоритма.

У этой задачи также есть точное аналитическое решение. Из этого решения следует $T_c = 2/\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 2.23$.

B4 3.00 Пусть система находится в парамагнитной фазе (температура больше температуры фазового перехода T_c). Исследуйте, как магнитная восприимчивость χ зависит от температуры. Предложите вид зависимости и определите ее параметры.

Будем рассматривать температуры $T > 3$. Для измерения магнитной восприимчивости будем включать небольшое магнитное поле $h \sim 0.1$. Величина поля должна быть не слишком большой, чтобы зависимость намагниченности линейно зависела от поля. С другой стороны, она должна быть не слишком маленькой, чтобы изменение намагниченности превышало погрешность, с которой она измеряется. Тогда магнитную восприимчивость можно определить как $\chi = \Delta m/h$. Построив график $1/\chi(T)$ получим линейную зависимость. Таким образом

$$\chi(T) = \frac{\alpha}{T - T_0}.$$

Константы α и T_0 зависят от выбранного размера решетки.

C1 2.50 Определите значение корреляционной длины для направления вдоль стороны квадратной решетки. В каком диапазоне расстояний применима экспоненциальная зависимость?

Возьмем $L = 100$, $T = T_c = 2.23$, $h = 1$. Проделаем $I = 200$ итераций алгоритма, чтобы система пришла в тепловое равновесие. Снимем зависимость $C(l)$ при $l \in [1, 30]$ и построим график $\ln C$ от l . Из графика находим, что зависимость приближенно линейна при $l \in [3, 15]$, из наклона графика находим корреляционную длину $\chi \approx 8$. Отметим, что значение корреляционной длины сильно зависит от температуры.