

A1^{0.50} Выразите заряды обкладок конденсатора $q_1(x)$ и $q_2(x)$ через $\mathcal{E}$, S , d , q , x и физические постоянные.

Рассмотрим смещение пластины на величину x от центра. Найдём разность потенциалов на обкладках 1 и 2 в поле пластины.

$$\varphi_{1q} - \varphi_{2q} = -2E_q x = -\frac{qx}{S\epsilon_0}$$

С другой стороны, поскольку конденсатор изначально не заряжен, разность потенциалов в поле конденсатора

$$\varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \frac{q_1 d}{S\epsilon_0}$$

Суммарно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} = \frac{q_1 d - qx}{S\epsilon_0}$$

откуда

$$q_1 = -q_2 = \frac{qx}{d} + \frac{\epsilon_0 \mathcal{E} S}{d}$$

A2^{0.50} Выразите силу электростатического взаимодействия $F(x)$ пластины с обкладками через $\mathcal{E}$, S , d , q , x и физические постоянные.

$$F_x(x) = \frac{q_1 q}{S\epsilon_0} = \frac{q^2 x}{S\epsilon_0 d} + \frac{\mathcal{E} q}{d}$$

A3^{1.00} Выразите a , A , B и C через $\mathcal{E}$, S , d , q , m и физические постоянные.

Уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{mS\epsilon_0 d}{q^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = x + \frac{\mathcal{E} S\epsilon_0}{q}$$

Подставляя полученный вид зависимости $x(t)$, сразу находим

$$a = \frac{q}{\sqrt{mS\epsilon_0 d}}$$

$$C = -\frac{\mathcal{E} S\epsilon_0}{q}$$

Далее учтём, что $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ в момент времени $t = 0$

$$x = A + B + C = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = a(A - B) = 0$$

откуда

$$A = B = -\frac{C}{2}$$

и окончательно

$$A = B = \frac{\mathcal{E} S\epsilon_0}{2q}$$

A4^{1.00} Выразите скорость пластины v^* в момент удара об обкладку конденсатора через $\mathcal{E}$, S , d , q , m и физические постоянные.

Можно воспользоваться результатом пункта **A3**, а также законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \int_0^{\frac{d}{2}} F_x(x) dx = \frac{\mathcal{E} q}{2} + \frac{q^2 d}{8S\epsilon_0}$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{E}q}{m} + \frac{q^2d}{4S\epsilon_0m}}$$

В1 0.30

Найдите заряды q на металлических обкладках конденсатора. Ответ выразите через V, S, d, ε и физические постоянные.

Под воздействием зарядов на металлических обкладках, электрическое поле внутри диэлектрика уменьшается в ε раз, откуда

$$\frac{V}{d} = \frac{q}{S\epsilon_0\varepsilon}$$

откуда

$$q = \frac{\varepsilon\epsilon_0SV}{d}$$

В2 0.30

Найдите силу тока I , протекающего через диэлектрик. Ответ выразите через V, S, d, ρ и физические постоянные.

Из закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

Откуда

$$\frac{I}{S} = \frac{V}{\rho d}$$

Или

$$I = \frac{VS}{\rho d}$$

В3 0.40

Найдите R и C , а также укажите вид соединения данных элементов (последовательно или параллельно).

$$R = \frac{\rho d}{S}$$

$$C = \frac{\varepsilon\epsilon_0S}{d}$$

Полученное выражение для силы тока говорит о том, что не все заряды, текущие по подводящим проводам остаются на обкладках конденсатора, а часть из них протекает в объёме диэлектрика. Это говорит о том, что эквивалетная схема представляет собой параллельные резистор R и конденсатор C .

В4 2.00

Найдите зависимость от времени силы тока $I(t)$, протекающего через источник. Ответ выразите через $\mathcal{E}, r, R, C$ и t .

Выражение для силы тока, текущего через источник. следующее

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{q_C(t)}{rC}$$

Найдём $q_C(t)$. Из первого закона Кирхгофа

$$I = I_R + I_C = \frac{q_C}{RC} + I_C$$

откуда

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{q_C(t)(R+r)}{rRC}$$

$$\frac{(R+r)}{rRc}dt = \frac{dq_C}{\frac{C\mathcal{E}R}{R+r} - q_C}$$

Интегрируя

$$\frac{(R+r)}{rRc}t = \int_0^{q_C} \frac{dq_C}{\frac{C\mathcal{E}R}{R+r} - q_C} = -\ln\left(1 - \frac{q_C(R+r)}{C\mathcal{E}R}\right)$$

или

$$q_C(t) = \frac{C\mathcal{E}R}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{rRC}t}\right)$$

и окончательно

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+r} + \frac{\mathcal{E}R}{r(R+r)}e^{-\frac{(R+r)}{rRC}t}$$

C1^{0.40}

Найдите эквивалентную ёмкость C_0 данного конденсатора. Ответ выразите через S_1 , S_2 , ε_1 , ε_2 , d и физические постоянные.

Данную систему можно представить как два параллельно соединённых сложных конденсатора, что говорит о том, что эквивалентные сопротивление и ёмкость могут быть вычислены по формулам параллельного соединения. Отсюда

$$C_0 = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 \epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 \epsilon_0 S_2}{d}$$

C2^{0.40}

Найдите эквивалентное сопротивление R_0 данного конденсатора. Ответ выразите через S_1 , S_2 , ρ_1 , ρ_2 и d .

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho_1 \rho_2 d}{\rho_1 S_2 + \rho_2 S_1}$$

C3^{0.40}

Найдите заряд $q_C(0)$ на конденсаторе ёмкости C сразу после замыкания ключа. Ответ выразите через $\mathcal{E}$, C и C_0 .

После замыкания ключа заряд практически мгновенно перераспределяется между обкладками конденсаторов C и C_0 . Отсюда

$$q_C = q_{C_0}$$

а также

$$\mathcal{E} = \frac{q_C}{C} + \frac{q_{C_0}}{C_0}$$

и окончательно

$$q_C = \frac{\mathcal{E} C C_0}{C + C_0}$$

C4^{1.30}

Найдите зависимость показаний вольтметра $V(t)$ от времени t после замыкания ключа. Ответ выразите через $\mathcal{E}$, C , C_0 , R_0 и t .

Выражение для падения напряжения на источнике следующее

$$\mathcal{E} = \frac{q_C}{C} + \frac{q_{C_0}}{C_0}$$

Пусть q_{R_0} - заряд, протёкший через резистор. Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{q_{R_0}}{C} + q_{C_0} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \right)$$

С другой стороны

$$\frac{q_{C_0}}{C_0} = I_{R_0} R_0$$

откуда

$$\mathcal{E} = \frac{q_{R_0}}{C} + I_{R_0} R_0 \left(1 + \frac{C_0}{C} \right)$$

Отсюда

$$\frac{dt}{R_0(C + C_0)} = \frac{dq_{R_0}}{C\mathcal{E} - q_{R_0}}$$

Учитывая, что $q_{R_0}(0) = 0$

$$\frac{t}{R_0(C + C_0)} = \int_0^{q_{R_0}} \frac{dq_{R_0}}{C\mathcal{E} - q_{R_0}} = -\ln\left(1 - \frac{q_{R_0}}{C\mathcal{E}}\right)$$

$$q_{R_0} = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_0(C+C_0)}}\right)$$

Дифференцируя

$$V(t) = I_{R_0}(t)R_0 = \frac{C\mathcal{E}}{C + C_0}e^{-\frac{t}{R_0(C+C_0)}}$$

C5 0.50 Какое количество теплоты Q_{R_0} выделится на сопротивлении R_0 ? Ответ выразите через $\mathcal{E}$, C и C_0 .

В начальный момент в цепи выделяется количество теплоты

$$Q_0 = \frac{q_C\mathcal{E}}{2} = \frac{CC_0\mathcal{E}^2}{2(C + C_0)}$$

В установившемся режиме конденсатор C_0 не заряжен, поэтому за всё время в цепи выделяется количество теплоты

$$Q_\infty = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

$$Q_{R_0} = Q_\infty - Q_0 = \frac{C^2\mathcal{E}^2}{2(C + C_0)}$$