

A1 ^{0.60} Найдите заряды конденсаторов q_{1_0} , q_{2_0} и q_{3_0} при $t \rightarrow 0$.

Поскольку сила тока, текущего через резисторы бесконечной быть не может, в начальный момент заряд практически мгновенно перераспределяется между обкладками второго и третьего конденсатора, следовательно, на них обоих будет одинаковый заряд, а первый конденсатор не успевает зарядиться

$$q_{1_0} = 0$$

$$q_{2_0} = q_{3_0} = q$$

Из второго закона Кирхгофа для контура с конденсаторами

$$\mathcal{E} = \frac{2q}{C}$$

откуда

$$q_{2_0} = q_{3_0} = \frac{C\mathcal{E}}{2}$$

A2 ^{0.60} Найдите заряды конденсаторов q_{1_∞} , q_{2_∞} и q_{3_∞} при $t \rightarrow \infty$.

Через бесконечно большое время, когда перераспределение зарядов прекратится, силы тока во всех элементах будут равны нулю. Поэтому

$$q_{1_\infty} = 0 = q_{2_\infty}$$

Падение напряжения происходит только на третьем конденсаторе, поэтому

$$q_{3_\infty} = C\mathcal{E}$$

A3 ^{0.40} Найдите количество теплоты Q_0 , выделившееся в системе за время $t \rightarrow 0$.

Запишем закон сохранения энергии для системы при перераспределении зарядов в начальный момент

$$\mathcal{E}q_{3_0} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = W_{C2} + W_{C3} + Q_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{4} + Q_0$$

откуда

$$Q_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{4}$$

A4 ^{0.40} Найдите количество теплоты Q_∞ , выделившееся в системе за время $t \rightarrow \infty$.

Из закона сохранения энергии для всего переходного процесса

$$\mathcal{E}q_{3_\infty} = C\mathcal{E}^2 = W_{C3} + Q_\infty = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + Q_\infty$$

откуда

$$Q_\infty = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

A5 ^{0.50} Из первого закона Кирхгофа, записанного для узла A , выразите I_2 через I_1 , q_1 , R и C .

Из второго закона Кирхгофа для контура с конденсаторами следует

$$\mathcal{E} = \frac{q_2 + q_3}{C}$$

откуда

$$I_3 = -I_2$$

Из первого закона Кирхгофа для узла A

$$I_3 = I_2 + I_{R2}$$

выражение для силы тока через второй резистор

$$I_{R2} = I_{R1} + I_1$$

Приравнивая падения напряжения на элементах с индексами 1

$$I_{R1} = \frac{q_1}{RC}$$

откуда окончательно

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{q_1}{RC}\right)$$

A6^{0.50} Из второго закона Кирхгофа, записанного для контура $ABCD$, выразите q_2 через I_1 , q_1 , R и C .

Найдите также I_2 , дифференцируя q_2 по времени. Ответ выразите через $\frac{dI_1}{dt}$, I_1 , R и C .

$$\frac{q_2}{C} = \frac{q_1}{C} + I_{R2}R$$

подставляя результаты предыдущего пункта

$$q_2 = 2q_1 + RCI_1$$

Дифференцируя

$$I_2 = 2I_1 + RC\frac{dI_1}{dt}$$

A7^{0.40} Приравнивая выражения для I_2 , полученные в пунктах A5 и A6, покажите, что дифференциальное уравнение, описывающее зависимость $q_1(t)$ имеет следующий вид

$$\alpha\frac{d^2q_1}{dt^2} + \beta\frac{dq_1}{dt} + q_1 = 0.$$

Выразите также α и β через R и C .

Приравнивая

$$2I_1 + RC\frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{q_1}{RC}\right)$$

Откуда

$$2(RC)^2\frac{d^2q_1}{dt^2} + 5RC\frac{dq_1}{dt} + q_1 = 0$$

$$\alpha = 2(RC)^2$$

$$\beta = 5RC$$

A8^{0.50} Найдите λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие уравнению, полученному в пункте A7. Ответы выразите через R и C .

В качестве λ_1 выберите большее из значений.

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda Ae^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

Откуда

$$2(RC)^2\lambda^2 + 5RC\lambda + 1 = 0$$

и окончательно

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

A9 ^{0.80} Из начальных условий найдите A_1 и A_2 . Ответы выразите через C и $\mathcal{E}$.

Для момента $t = 0$

$$q_1 = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R}$$

Откуда

$$A_1 = -A_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{\mathcal{E}}{R\sqrt{17}}$$

A10 ^{1.30} Найдите количества теплоты Q_{R_1} и Q_{R_2} , выделившиеся в резисторах за время $t \rightarrow \infty$. Ответы выразите через C и $\mathcal{E}$.

Найдём выражение для тепловой мощности, выделяющейся в первом резисторе

$$P_{R_1} = \frac{U_1^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{17R} \left(e^{2\lambda_1 t} - 2e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + e^{2\lambda_2 t} \right)$$

Отсюда

$$Q_{R_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{17R} \int_0^\infty \left(e^{2\lambda_1 t} - 2e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + e^{2\lambda_2 t} \right) dt$$

Учитывая, что $\lambda_1; \lambda_2 < 0$, все три первообразных при $t \rightarrow \infty$ обращаются в ноль. Таким образом

$$\int_0^\infty \left(e^{2\lambda_1 t} - 2e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + e^{2\lambda_2 t} \right) dt = \left(\frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_2} \right) = \frac{17}{10RC}$$

Отсюда

$$Q_{R_1} = \frac{C\mathcal{E}^2}{10}$$

При этом

$$Q_{R_1} + Q_{R_2} = Q_\infty - Q_0 = \frac{C\mathcal{E}^2}{4}$$

откуда

$$Q_{R_2} = \frac{3C\mathcal{E}^2}{20}$$