

A1 ^{0.40} Запишите выражение для нахождения оптимального значения a_0 через суммы (или средние) величин T , V и их комбинаций.

Будем решать задачу формально, выразим температуру из модельной функции и запишем сумму S , которую нужно минимизировать.

$$T = \frac{(p + a_0) V}{R}$$

$$S = \sum_n \left(T_i - \frac{p V_i}{R} - \frac{a_0 V_i}{R} \right)^2$$

Дифференцируем:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_n 2 \left(T_i - \frac{(p + a_0) V_i}{R} \right) \left(-\frac{V_i}{R} \right) = 0$$

Преобразуем (сократив на "-2"):

$$\frac{1}{R} \sum_n T_i V_i - \frac{p + a_0}{R^2} \sum_n V_i^2 = 0$$

И далее

$$p + a_0 = \frac{R \sum_n T_i V_i}{\sum_n V_i^2}$$

Окончательно получаем

$$a_0 = \frac{R \sum_n T_i V_i}{\sum_n V_i^2} - p = R \frac{\overline{TV}}{\overline{V^2}} - p$$

Примечание: Ответ можно было бы написать почти сразу, если осознать, что модельная формула – это линейная зависимость с одним параметром: угловым коэффициентом.

A2 ^{0.30} Рассчитайте значения нужных вам сумм (или средних) для всего набора данных.

$$\sum_n T_i V_i = 6.5903 \text{ К} \cdot \text{м}^3, \overline{TV} = 0.31382 \text{ К} \cdot \text{м}^3$$

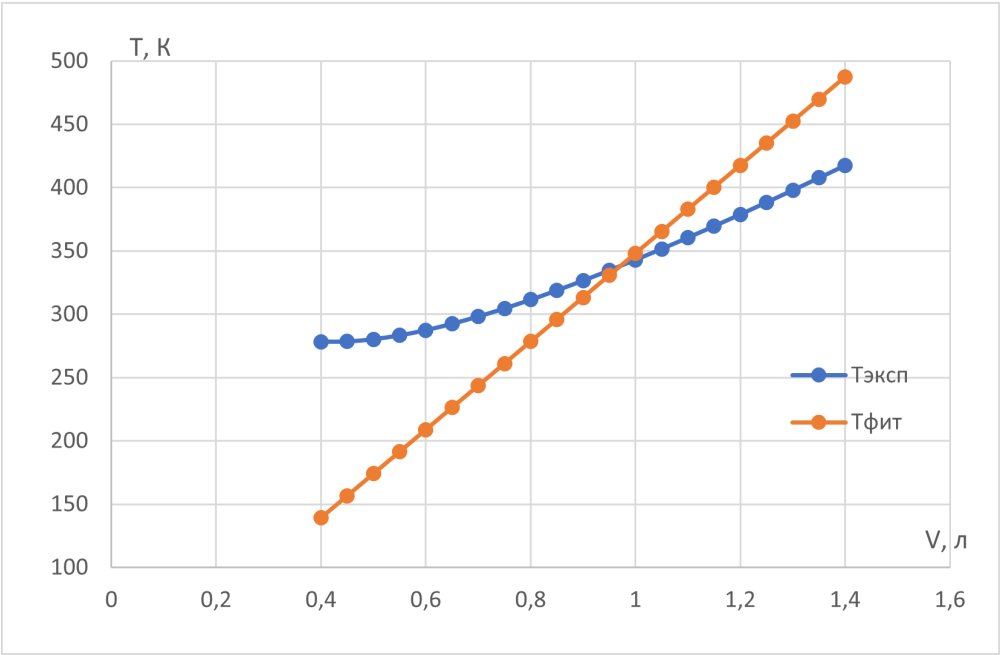
$$\sum_n V_i^2 = 1.8935 \cdot 10^{-5} \text{ м}^6, \overline{V^2} = 9.0167 \cdot 10^{-7} \text{ м}^6$$

Здесь и далее сохраняем побольше значащих цифр для уменьшения погрешности округления итогового ответа.

A3 ^{0.40} Рассчитайте значение a_0 . Укажите его с точностью до трех значащих цифр.

$$a_0 = 892 \text{ кПа}$$

A4 ^{0.40} Для каждого значения объема рассчитайте значение температуры, которое получается в результате фитирования. Постройте на одном графике исходные экспериментальные данные и точки фитирования. Данные разных серий отмечайте разными значками. Подпишите серии.



В1 0.40

Запишите выражение для нахождения оптимального значения a_1 через суммы (или средние) величин T , V и их комбинаций.

Действуем опять же формально:

$$T = \frac{pV}{R} + \frac{a_1}{R}$$

$$S = \sum_n \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{a_1}{R} \right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_n 2 \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{a_1}{R} \right) \left(-\frac{1}{R} \right) = 0$$

$$\sum_n T_i - \frac{p}{R} \sum_n V_i - \frac{a_1}{R} \sum_n 1 = 0$$

Откуда получаем окончательный ответ:

$$a_1 = \frac{R \sum_n T_i - p \sum_n V_i}{n} = R\bar{T} - p\bar{V}$$

В2 0.30

Рассчитайте значения нужных вам сумм (или средних) для всего набора данных.

$$\sum_n T_i = 7009.2 \text{ K}, \bar{T} = 333.771 \text{ K}$$

$$\sum_n V_i = 0.0189 \text{ м}^3, \bar{V} = 0.0009 \text{ м}^3$$

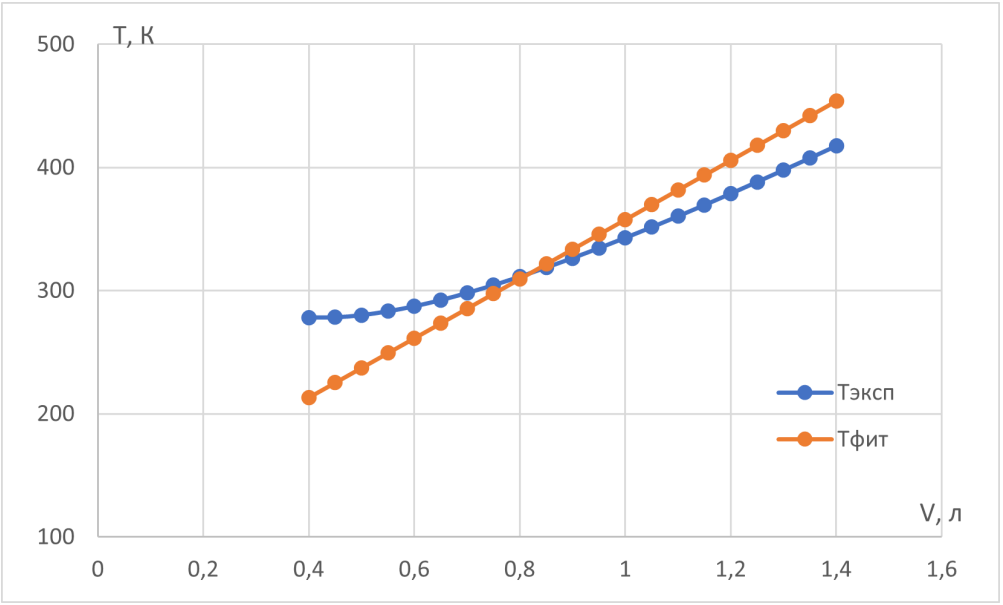
В3 0.40

Рассчитайте значение a_1 . Укажите его с точностью до трех значащих цифр.

$$a_1 = 974 \text{ Па} \cdot \text{м}^3$$

В4 0.40

Для каждого значения объема рассчитайте значение температуры, которое получается в результате фитирования. Постройте на одном графике исходные экспериментальные данные и точки фитирования. Данные разных серий отмечайте разными значками. Подпишите серии.



С1 0.40 Запишите выражение для нахождения оптимального значения a_2 через суммы (или средние) величин T , V и их комбинаций.

Действуем опять же формально:

$$T = \frac{pV}{R} + \frac{a_2}{VR}$$

$$S = \sum_n \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{a_2}{V_i R} \right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_n 2 \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{a_2}{V_i R} \right) \left(-\frac{1}{V_i R} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{R} \sum_n \frac{T_i}{V_i} + \frac{p}{R^2} \sum_n 1 + \frac{a_2}{R^2} \sum_n \frac{1}{V_i^2} = 0$$

Откуда окончательно получаем:

$$a_2 = \frac{R \sum_n \frac{T_i}{V_i} - pn}{\sum_n \frac{1}{V_i^2}} = \frac{\overline{R \left(\frac{T}{V} \right)} - p}{\overline{\left(\frac{1}{V^2} \right)}}$$

Примечание: Интуитивно можно было бы пойти путем линеаризации $pV^2 + a_2 = RTV$, и по аналогии с пунктом В1 написать, что $a_2 = \overline{RTV} - p\overline{V^2}$. Это ошибочный путь и неверное решение. При расчете таким способом оценка для a_2 будет "смещенной". В решении пункта С3 мы рассчитаем значения обоими способами и убедимся в том, что применение линеаризации приводит к более высокому значению суммы квадратов отклонений.

С2 0.30 Рассчитайте значения нужных вам сумм (или средних) для всего набора данных.

$$\sum_n \frac{T_i}{V_i} = 8489686 \text{ К/м}^3, \overline{\left(\frac{T}{V} \right)} = 404271 \text{ К/м}^3$$

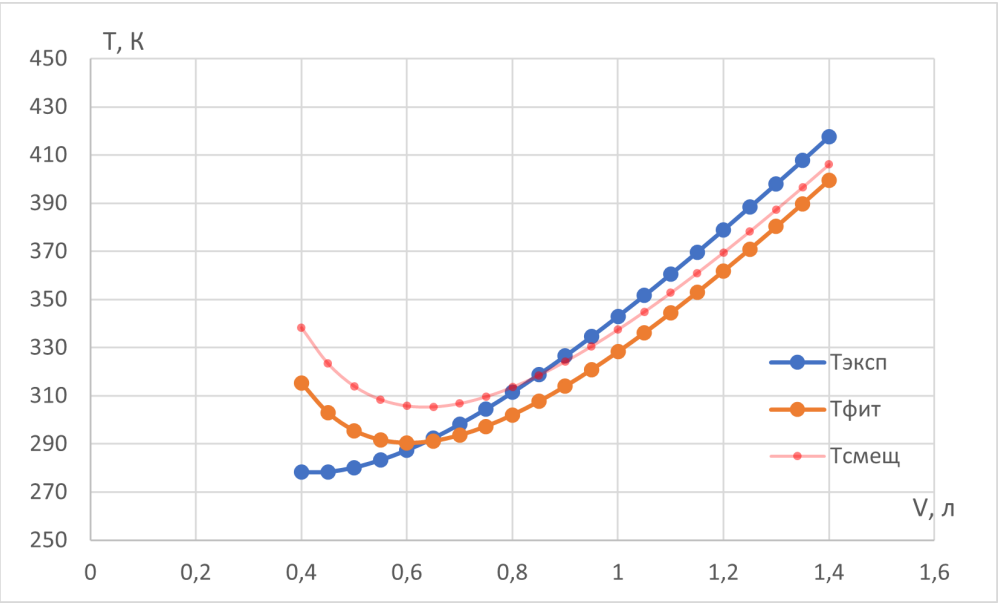
$$\sum_n \frac{1}{V_i^2} = 39221160 \text{ м}^{-6}, \overline{\left(\frac{1}{V^2} \right)} = 1867674 \text{ м}^{-6}$$

С3 0.40 Рассчитайте значение a_2 . Укажите его с точностью до трех значащих цифр.

$$a_2 = 0.728 \text{ Па} \cdot \text{м}^6$$

Для расчета a_2^* для линеаризованной зависимости у нас уже посчитаны все величины (пункт А2). Поэтому $a_2^* = 0.805$. Если рассчитать $S(a_2^*) = 8813 \text{ К}^2$, то оно окажется больше, чем $S(a_2) = 5478 \text{ К}^2$.

С4 0.40 Для каждого значения объема рассчитайте значение температуры, которое получается в результате фитирования. Постройте на одном графике исходные экспериментальные данные и точки фитирования. Данные разных серий отмечайте разными значками. Подпишите серии.



D1 1.50 Запишите выражения для нахождения оптимальных значений c и d через суммы (или средние) величин T , V и их комбинаций.

Действуем опять же формально:

$$T = \frac{pV}{R} + \frac{C}{RV} + \frac{d}{RV^2}$$

$$S = \sum_n \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{c}{RV_i} - \frac{d}{RV_i^2} \right)^2$$

Дифференцируя, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_n 2 \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{c}{RV_i} - \frac{d}{RV_i^2} \right) \left(-\frac{1}{RV_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = \sum_n 2 \left(T_i - \frac{pV_i}{R} - \frac{C}{RV_i} - \frac{d}{RV_i^2} \right) \left(-\frac{1}{RV_i^2} \right) = 0$$

Преобразуем систему:

$$R \sum_n \frac{T_i}{V_i} - p \sum_n 1 - c \sum_n \frac{1}{V_i^2} - d \sum_n \frac{1}{V_i^3} = 0$$

$$R \sum_n \frac{T_i}{V_i^2} - p \sum_n \frac{1}{V_i} - c \sum_n \frac{1}{V_i^3} - d \sum_n \frac{1}{V_i^4} = 0$$

Перейдем к средним значениям и приведем систему к удобному виду:

$$\overline{cV^{-2}} + \overline{dV^{-3}} = \overline{RT/V} - p$$

$$\overline{cV^{-3}} + \overline{dV^{-4}} = \overline{RT/V^2} - p\overline{V^{-1}}$$

Откуда, решая совместно уравнения, получим ответы:

$$c = \frac{R \left(\overline{T/V^2 V^{-3}} - \overline{T/V V^{-4}} \right) - p \left(\overline{V^{-1} V^{-3}} - \overline{V^{-4}} \right)}{\left(\overline{V^{-3}} \right)^2 - \overline{V^{-2} V^{-4}}}$$

$$d = \frac{R \left(\overline{T/V^2 V^{-2}} - \overline{T/V V^{-3}} \right) - p \left(\overline{V^{-1} V^{-2}} - \overline{V^{-3}} \right)}{\overline{V^{-2} V^{-4}} - \left(\overline{V^{-3}} \right)^2}$$

Примечание: Аналогично пункту C1, можно было бы привести модельную функцию к линейной зависимости: $cV + d = RTV^2 - pV^3$, и определять коэффициенты c и d по формулам, приведенным во введении к задаче. Это ошибочный путь и неверное решение. При расчете таким способом оценки для c и d будут "смещенными".

D2 ^{2.00} Рассчитайте значения нужных вам сумм (или средних) для всего набора данных.

Две величины $\overline{T/V}$ и $\overline{V^{-2}}$ у нас посчитаны в пункте C2.
 $\overline{V^{-1}} = 1270.76 \text{ м}^{-3}$

$$\overline{V^{-3}} = 3.13694 \cdot 10^9 \text{ м}^{-9}$$

$$\overline{V^{-4}} = 5.85765 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-12}$$

$$\overline{T/V^2} = 0.568387 \cdot 10^9 \text{ К/м}^6$$

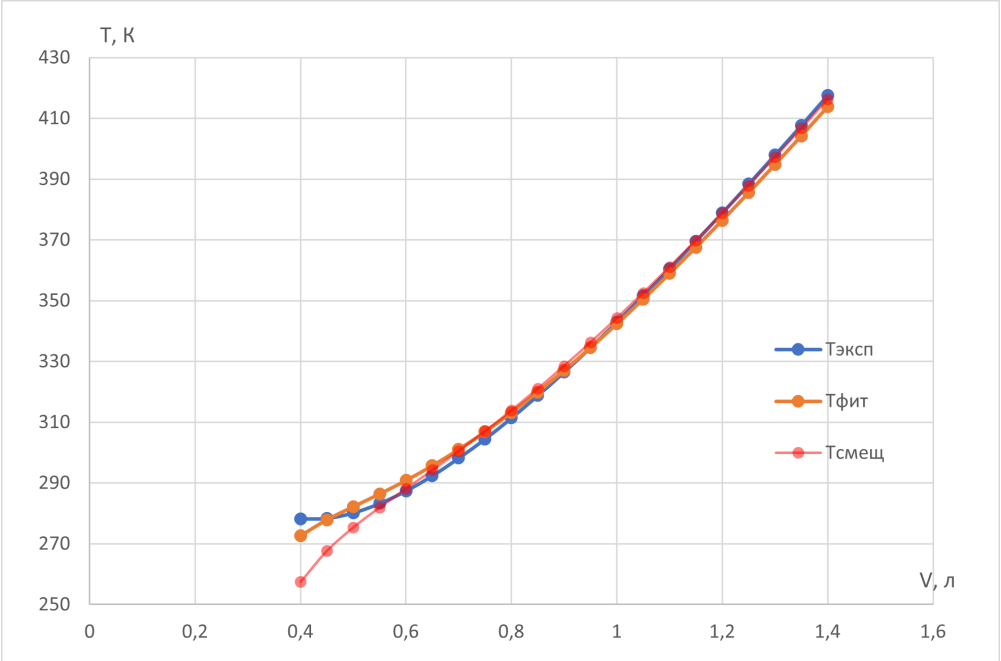
D3 ^{1.00} Рассчитайте значения c и d . Укажите их с точностью до трех значащих цифр.

$$c = 1.02 \text{ Па} \cdot \text{м}^6$$

$$d = -1.73 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{м}^9$$

Смещенные значения:
 $c^* = 1.08 \text{ Па} \cdot \text{м}^6, d^* = -2.17 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{м}^9$

D4 ^{1.00} Для каждого значения объема рассчитайте значение температуры, которое получается в результате фитирования. Постройте на одном графике исходные экспериментальные данные и точки фитирования. Данные разных серий отмечайте разными значками. Подпишите серии.



E1 ^{??} Рассчитайте значения a и b . Укажите их с точностью до трех значащих цифр. Оцените масштаб работы, проведенной Ван-дер-Ваальсом.

В этой части задачи нужно аналогично формально выполнить минимизацию суммы по параметрам a и b . Итоговая система уравнений на параметры будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 ab + \alpha_4 a^2 + \alpha_5 a^2 b = c_1 \\ \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 ab + \beta_4 b^2 + \beta_5 ab^2 = c_2 \end{cases}$$

Коэффициенты α_i и β_i связаны целиком со средними величинами, посчитанными в пункте D2. Т.е. дополнительно ничего считать не требовалось бы. Каждое из уравнений линейно по одной из переменной и квадратично по второй. Поэтому систему можно свести к уравнению пятой степени на одну из переменных. Уравнение пятой степени точно имеет как минимум одно действительное решение.