

A1 0.50

Найдите среднюю за период силу натяжения нити маятника $\langle T \rangle$. Выразите ответ через угловую амплитуду колебаний α и параметры маятника.

Если текущий угол отклонения груза φ , скорость груза $v = l\dot{\varphi}$, сила натяжения нити равна

$$T = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{l} \approx mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + ml\dot{\varphi}^2.$$

Средний квадрат угла и его производной при гармонических колебаниях выражаются через амплитуду α как

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{2}, \quad \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \frac{\alpha^2 \omega^2}{2},$$

где $\omega^2 = g/l$ – циклическая частота колебаний.

Отсюда получаем

$$\langle T \rangle = mg \left(1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2} \right) + ml \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = mg \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right).$$

Ответ:

$$\langle T \rangle = mg \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)$$

A2 0.20

Пусть теперь длину нити маятника медленно изменяют, так что относительное изменение длины за один период колебаний мало. Какая работа совершится над грузом, если длина нити изменяется на $\Delta l \ll l$? Выразите ответ через угловую амплитуду колебаний α (считая ее постоянной) и параметры маятника.

Работа силы натяжения нити равна произведению средней силы натяжения нити на перемещение. Учтем, что при увеличении длины нити перемещение направлено противоположно действию силы, поэтому работа отрицательна. Также можно учесть работу силы тяжести $mg\Delta l$, действующей на груз, тогда полная работа будет равна $A = -mg\Delta l \alpha^2/4$.

Ответ:

$$A = -mg\Delta l \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)$$

A3 0.80

В начальный момент времени длина равна l_0 , а энергия колебаний W_0 . Найдите энергию колебаний W_1 , когда длина нити станет равной l_1 . Потенциальная энергия при этом все время отсчитывается от нижнего положения груза, то есть с изменением длины нити нуль потенциальной энергии смещается!

Изменение энергии груза равно работе, совершенной над ним внешними силами при изменении длины нити. При этом первый член в работе $-mg\Delta l$ отвечает изменению потенциальной энергии груза в положении равновесия. Мы будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, поэтому в дальнейшем этот член учитывать не нужно. Энергия колебаний выражается через их амплитуду

$$W = mgl \frac{\alpha^2}{2}.$$

Скорость изменения энергии

$$\frac{dW}{dt} = -mg \frac{\alpha^2}{4} \frac{dl}{dt}.$$

Выразим здесь амплитуду через энергию:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{W}{2l} \frac{dl}{dt}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dW}{W} = -\frac{1}{2} \frac{dl}{l}, \quad \ln W = -\frac{1}{2} \ln l + \text{const},$$

а значит

$$W \sim l^{-1/2}$$

Из этого соотношения следует, что при медленном изменении длины нити маятников отношение $W/\omega \approx \text{const}$ остается постоянной. Она называется адиабатическим инвариантом.

Ответ:

$$W_1 = W_0 \sqrt{\frac{l_0}{l_1}}$$

A4 0.40

В условиях предыдущего пункта, найдите амплитуду α_1 , когда длина маятника станет равна l_1 . В начальный момент времени длина нити равна l_0 , амплитуда колебаний α_0 .

Амплитуда колебаний определяется энергией

$$W \sim l\alpha^2,$$

поэтому

$$\alpha \sim W^{1/2} l^{-1/2} \sim l^{-3/4}.$$

Тогда конечная амплитуда

Ответ:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{3/4}$$

A5 1.00

Пусть теперь маятник имеет заряд $q > 0$ и помещен во внешнее электрическое поле E , направленное вертикально ($E > 0$ когда поле направлено вниз). Это электрическое поле медленно меняется со временем. Пусть в начальный момент времени поле было равно нулю, а амплитуда колебаний груза α_0 . Рассмотрите эту систему аналогично пунктам A1 - A4. Найдите амплитуду колебаний груза α_2 , когда электрическое поле станет равным E_1 . Считайте, что поле меняется достаточно медленно, так что изменение амплитуды колебаний за один период мало. Длина маятника постоянна и равна l .

Если электрическое поле постоянно и равно E , то движение маятника происходит так же, как и в эквивалентном гравитационном поле с ускорением свободного падения $g_1 = g + qE/m$. При изменении поля частота колебаний $\omega = \sqrt{g_1/l}$ также будет меняться. Поскольку поле переменное его работа за период не будет равна нулю, несмотря на то, что груз маятник вернется в исходную точку. Пусть за период колебаний T электрическое поле изменилось на величину ΔE . Найдём соответствующую работу, она будет равна изменению кинетической энергии груза. Важно, что мы будем рассматривать промежуток, который начинается с прохождения грузом положения равновесия. Тогда вся энергия груза в начале и в конце равна кинетической энергии, а значит работа равна увеличению энергии колебаний.

Зависимость угла отклонения маятника от времени имеет вид $\varphi = \alpha \sin \omega t$, а вертикальная координата маятника $z = l(1 - \cos \varphi) \approx l\varphi^2/2$ (ось z направлена вверх).

Тогда работа электрического поля

$$dA = -qEdz = -qEl\varphi d\varphi = -qEl\alpha \sin \omega t \omega \alpha \cos \omega t dt = -qEl\omega \alpha^2 \sin \omega t \cos \omega t dt.$$

Электрическое поле $E = E_0 + \Delta E \frac{t}{T}$, причём вклад в работу за период даёт только переменная часть поля, поэтому полная работа

$$A = -ql\omega \alpha^2 \frac{\Delta E}{T} \int_0^T dt t \sin \omega t \cos \omega t$$

Вычислим стоящий здесь интеграл:

$$\int_0^T dt t \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \int_0^T t dt \sin 2\omega t = \frac{1}{2} \int_0^T t dt \left(-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right) =$$

$$-\frac{t \cos 2\omega t}{4\omega} \Big|_0^T + \frac{1}{4\omega} \int_0^T dt \cos 2\omega t = -\frac{T}{4\omega}.$$

$$A = \frac{1}{4} ql\alpha^2 \Delta E$$

Тогда скорость изменения энергии

$$\frac{dW}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{1}{4} ql\alpha^2 \frac{dE}{dt}.$$

Энергия колебаний выражается через амплитуду

$$W = (mg + qE)l\alpha^2/2$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{qW}{2(mg + qE)} \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{1}{2} \frac{qdE}{qE + mg}, \quad \ln W = \frac{1}{2} \ln(qE + mg) + \text{const}$$

Таким образом получаем

$$W \sim \sqrt{g + qE/m}$$

то есть опять сохраняется адиабатический инвариант W/ω .
Значит амплитуда

$$\alpha \sim \left(g + \frac{qE}{m}\right)^{-1/4}$$

Ответ:

$$\alpha_2 = \alpha_0 \left(1 + \frac{qE_1}{mg}\right)^{-1/4}$$

B1 ^{0.90} Пусть $m_1 = m + \delta m$, $m_2 = m$, $\delta m \ll m$. Начальная скорость груза m_1 равна нулю, начальная амплитуда колебаний второго груза равна α_0 , длина правого участка нити l_0 .
Найдите среднее ускорение a_0 левого груза в начальный момент времени. Усреднение производится по периоду колебаний правого груза. Считайте что $a_0 > 0$ если ускорение направлено вверх.

Средняя сила натяжения нити равна $T = m_2 g(1 + \alpha_0^2/4) - m_2 a_0$, здесь первое слагаемое – это среднее натяжение нити из предыдущей части, а последний вклад возникает из-за ускорения второго груза вдоль нити.
Второй закон Ньютона для первого груза (после усреднения по движению второго):

$$m_1 a_0 = -m_1 g + m_2 g(1 + \alpha_0^2/4) - m_2 a_0.$$

Подставляя значения масс, получаем

$$(m_1 + m_2) a_0 = -(m + \delta m)g + mg + mg\alpha_0^2/4 = -\delta m g + mg\alpha_0^2/4.$$

Все члены в правой части малы, поэтому слева можно пренебречь отличием m_1 от m , тогда ускорение

Ответ:

$$a_0 = -\frac{\delta m}{2m}g + g\frac{\alpha_0^2}{8}$$

B2 ^{0.20} При каком значении δm_0 левый груз в среднем не будет двигаться?

Среднее ускорение обращается в 0 при

Ответ:

$$\delta m = m \frac{\alpha_0^2}{4}$$

B3 ^{1.00} Пусть $\delta m = \delta m_0$. Найдите максимальное смещение z_{max} груза m_1 относительно начального положения.

Запишем уравнение движения груза m_1 , его координату обозначим z , начальное значение координаты равно нулю, ось z направлена вверх.

$$m_1 \ddot{z} = -m_1 g + T.$$

В первом приближении левый груз не влияет на движение правого. тогда закон движения правого груза

$$\varphi(t) = \alpha_0 \cos \omega t, \omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}},$$

тогда сила натяжения нити

$$T = m_2(g \cos \varphi + l_0 \dot{\varphi}^2) - m_2 \ddot{z} = m \left(g - g \frac{\varphi^2}{2} + l_0 \dot{\varphi}^2 \right) - m_2 \ddot{z};$$

$$T = mg \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} \cos^2 \omega t + \alpha_0^2 \sin^2 \omega t \right) - m \ddot{z}.$$

Уравнение движения

$$2m \ddot{z} = -(m + \delta m)g + mg \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} \cos^2 \omega t + \alpha_0^2 \sin^2 \omega t \right).$$

Подставим значение $\delta m = \delta m_0$:

$$2m \ddot{z} = mg \alpha_0^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \right) = \frac{3mg \alpha_0^2}{4} (1 - 2 \cos^2 \omega t) = -\frac{3mg \alpha_0^2}{4} \cos 2\omega t.$$

Решение этого уравнения при заданных начальных условиях

$$z = \frac{3g \alpha_0^2}{32 \omega^2} (\cos 2\omega t - 1).$$

Смещение будет максимальным, когда $\cos \omega t = -1$, при этом

$$z = -\frac{3g \alpha_0^2}{16g/l_0} = -\frac{3}{16} l_0 \alpha_0^2,$$

знак - говорит о том, что груз сдвинется вниз. Видим, что смещение груза действительно мало, поэтому движение правого груза не меняется.

Ответ:

$$z_{max} = \frac{3}{16} \alpha_0^2 l_0$$

В4 1.30

Если значение δm не очень сильно отличается от δm_0 , то груз m_1 будет совершать колебания, циклическая частота колебаний которых много меньше частоты колебаний правого груза. Найдите эту частоту Ω , а также амплитуду B колебаний. При каких значениях $\Delta m = \delta m - \delta m_0$ такие колебания можно считать гармоническими?

Снова запишем уравнения движения для левого груза, усредненные по периоду. Пусть в текущий момент времени амплитуда колебаний правого груза равна $\alpha(t)$, тогда

$$\ddot{z} = -\frac{\delta m}{2m} g + \frac{1}{8} g \alpha^2(t).$$

В процессе движения длина нити правого груза меняется, при этом согласно А4 меняется и амплитуда колебаний

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(\frac{l_0}{l(t)} \right)^{3/4}.$$

Текущая длина нити правого груза выражается через смещение левого груза $l(t) = l_0 + z$. Тогда уравнение движение принимает вид

$$\ddot{z} = -\frac{\delta m}{2m} g + \frac{1}{8} g \alpha_0^2 \left(\frac{l_0}{l_0 + z} \right)^{3/2}$$

Запишем $\delta m = \delta m_0 + \Delta m$ и разложим правую часть уравнения до первого порядка по z :

$$\ddot{z} = -\frac{\delta m_0}{2m} g - \frac{\Delta m}{2m} g + \frac{1}{8} g \alpha_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{z}{l_0} \right) = -\frac{\Delta m}{2m} g - \frac{3g \alpha_0^2}{16 l_0} z.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\Omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{3g}{16 l_0}}$$

Из-за постоянного слагаемого слагаемого в правой части решение уравнения – сумма постоянного смещения и гармонического колебания. С учетом того, что в начальный момент времени смещение равно нулю, закон движения имеет вид

$$z = -\frac{\Delta m}{m} \frac{8l_0}{3\alpha_0^2} (1 - \cos \Omega t) = -B(1 - \cos \Omega t).$$

Коэффициент перед косинусом – амплитуда колебаний.

Мы получили уравнение гармонических колебаний, раскладывая уравнение движения по z/l_0 . Приближение работает, если амплитуда колебаний мала $B \ll l_0$, то есть

$$\frac{\Delta m}{m} \ll \alpha_0^2.$$

Ответ:

$$\Omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{3g}{16l_0}}$$

$$B = \frac{\Delta m}{m} \frac{8l_0}{3\alpha_0^2}$$

$$\frac{\Delta m}{m} \ll \alpha_0^2.$$

B5^{0.80}

Пусть теперь значение $\delta m \ll m$ произвольно. Найдите максимальную и минимальную длины правого участка нити при дальнейшем движении.

Начальная энергия колебаний правого груза

$$W_0 = mgl_0 \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Если в некоторый момент времени длина нити правого груза равна l , энергия колебаний в этот момент времени

$$W = W_0 \frac{l_0^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

При этом изменение потенциальной энергии в гравитационном поле

$$\Delta U = \delta mg(l - l_0).$$

Запишем закон сохранения энергии, с учетом того, что в крайних точках кинетическая энергия вертикального движения грузов равна нулю:

$$W_0 = W + \delta mg(l - l_0) = W_0 \frac{l_0^{1/2}}{l^{1/2}} + \delta mg(l - l_0).$$

Введем обозначения

$$x^2 = \frac{l}{l_0}, \quad \xi = \frac{W_0}{\delta mgl_0} = \frac{m\alpha_0^2}{2\delta m},$$

тогда получим уравнение на x :

$$\xi \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

У этого уравнения всегда есть решение $x = 1$, отвечающее начальному положению грузов. Преобразуем:

$$\xi = \frac{x^2 - 1}{1 - 1/x} = x(x + 1).$$

Корни этого уравнения

$$x = \pm \sqrt{\xi + 1/4} - 1/2.$$

Имеют смысл только положительные решения, поэтому дальше рассматриваем только положительный знак перед корнем.

Ему отвечает длина нити

$$l_1 = l_0 \left(\sqrt{\frac{m\alpha_0^2}{2\delta m} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

При $\xi > 2$ $l_1 > l_0$ (то есть $\alpha_0^2 > 4\delta m/m$) и значение l_1 – максимальное значение длины нити, тогда минимальное значение l_0 . Если же $\xi < 2$, l_1 – минимальное значение, а максимальное значение l_0 .
Заметим, что граничное значение $\xi = 2$ как раз отвечает значению $\delta m/m = \alpha_0^2/4$, при котором левый груз в целом не движется. Если масса левого груза больше критической, он движется вниз, а длина правой нити уменьшается. Если же масса меньше критической, левый груз будет двигаться вверх, а длина нити будет увеличиваться.

Ответ: При $\delta m/m > \alpha_0^2/4$: $l_{min} = l_1$, $l_{max} = l_0$.
При $\delta m/m < \alpha_0^2/4$: $l_{min} = l_0$, $l_{max} = l_1$.

$$l_1 = l_0 \left(\sqrt{\frac{m\alpha_0^2}{2\delta m} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2$$

C1 0.90 Рассмотрим колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L и плоского конденсатора, между обкладками которого вакуум. Расстояние между обкладками конденсатора медленно меняют. Пусть начальная емкость конденсатора C_0 , начальная амплитуда тока в контуре I_0 . Рассмотрите систему аналогично пунктам А1-А4. Найдите амплитуду тока I_1 в тот момент, когда емкость конденсатора станет равна C_1 .

Пусть амплитуда колебаний заряда на конденсаторе в некоторый момент времени равна Q , тогда энергия колебаний в контуре равна

$$W = \frac{Q^2}{2C},$$

где емкость конденсатора с расстоянием между пластинами d равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Если в данный момент времени заряд пластин конденсатора q , электрическое поле в нем равно

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

они притягиваются друг к другу с силой

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S},$$

а средняя сила притяжения равна

$$\langle F \rangle = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S}.$$

Тогда если за время, много большее периода колебаний, расстояние между пластинами изменили на величину $\Delta d \ll d$, при этом совершили работу

$$A = \langle F \rangle \Delta d = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} \Delta d = \frac{C}{2\varepsilon_0 S} W \Delta d = \frac{1}{2} W \frac{\Delta d}{d}.$$

Таким образом, скорость изменения энергии колебаний

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} W,$$

откуда получаем

$$\ln W = \frac{1}{2} \ln d + const, \quad W \sim d^{1/2} \sim C^{-1/2}.$$

Такая зависимость энергии напряжения от емкости отвечает адиабатическому инварианту $W/\omega = const$, так как $\omega \sim C^{-1/2}$. Инвариант имеет такой же вид, как и в механике.
Энергия выражается через амплитуду тока:

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

поэтому $I \sim W^{1/2}$, а значит

Ответ:

$$I_1 = I_0 \left(\frac{C_0}{C_1} \right)^{1/4}.$$