

A1^{0.10} Выразите $\dot{v}_x$ через F_x и m .

Из теоремы о движении центра масс

$$F_x = m\dot{v}_x$$

откуда

$$\dot{v}_x = \frac{F_x}{m}$$

Ответ:

$$\dot{v}_x = \frac{F_x}{m}$$

A2^{0.40} Выразите $\dot{\omega}$ через F_x , N , L , φ и m .

Из уравнения динамики вращательного движения относительно центра масс

$$I_O\dot{\omega} = \frac{mL^2\dot{\omega}}{3} = NL\sin\varphi - F_xL\cos\varphi$$

откуда

$$\dot{\omega} = \frac{3}{mL}(N\sin\varphi - F_x\cos\varphi)$$

Ответ:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{mL}(N\sin\varphi - F_x\cos\varphi)$$

A3^{0.10} Выразите v_{Ax} через ω , v_x , φ и L .

Из теоремы о сложении скоростей

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{\text{отн}}$$

откуда

$$v_{Ax} = v_x - \omega L\cos\varphi$$

Ответ:

$$v_{Ax} = v_x - \omega L\cos\varphi$$

A4^{0.40} Докажите, что $v_{Ax} \leq 0$ при любых значениях μ и φ .

Если $v_{Ax} > 0$, то $F_x = -\mu N$

Тогда

$$\omega L = -\frac{3v_x}{\mu}(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)$$

или же

$$v_{Ax} = v_x \left(1 + \frac{3\cos\varphi}{\mu}(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) \right)$$

Но при этом $v_x < 0$, поэтому $v_{Ax} < 0$, что приводит к противоречию.

A5^{0.10} Выразите v_{Ax} через v_x , φ и μ .

В данном случае $F_x = \mu N$. Тогда

$$\omega L = \frac{3v_x}{\mu}(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

или же

$$v_{A_x} = v_x \left(1 - \frac{3 \cos \varphi}{\mu} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \right)$$

Ответ:

$$v_{A_x} = v_x \left(1 - \frac{3 \cos \varphi}{\mu} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \right)$$

A6^{0.60}

При каком минимально возможном значении μ_0 проскальзывание невозможно ни при каких значениях угла φ ?

Учитывая, что

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

после несложных преобразований

$$v_{A_x} = -\frac{v_x}{2\mu} (3 \sin 2\varphi - 3\mu \cos 2\varphi - 5\mu)$$

Вводя переменную $\varphi_0 = \arctan \mu$

$$v_{A_x} = -\frac{v_x}{2\mu} \left(3\sqrt{1 + \mu^2} \sin(2\varphi - \varphi_0) - 5\mu \right)$$

Условие $v_{A_x} < 0$ реализуется тогда когда выражение в скобках положительно. Поскольку $\sin(2\varphi - \varphi_0) \leq 1$

$$\frac{5\mu}{3\sqrt{1 + \mu^2}} \leq 1$$

или же

$$\mu_0 = \frac{3}{4}$$

второй способ

При наличии проскальзывания $F_x = \mu N$. Тогда можем выразить μ через φ как

$$\mu = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{1 + 3 \cos^2 \varphi}$$

Найдём производную

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{3}{1 + 3 \cos^2 \varphi} ((\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(1 + 3 \cos^2 \varphi) + 6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)$$

откуда найдём точку экстремума

$$\varphi = \arctan(2)$$

и соответствующее максимальное значение

$$\mu_0 = \frac{3}{4}$$

Ответ:

$$\mu_0 = \frac{3}{4}$$

A7 ^{0.80} Для $\mu < \mu_0$ найдите все значения угла φ , при которых проскальзывание возможно. Границы диапазона углов выразите через μ .

Условие положительной величины в скобках следующее

$$\arcsin \frac{5\mu}{3\sqrt{1+\mu^2}} \leq 2\varphi - \varphi_0 \leq \pi - \arcsin \frac{5\mu}{3\sqrt{1+\mu^2}}$$

откуда

$$\frac{\arcsin \frac{5\mu}{3\sqrt{1+\mu^2}} + \arctan \mu}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi - \arcsin \frac{5\mu}{3\sqrt{1+\mu^2}} + \arctan \mu}{2}$$

второй способ

Решим уравнение

$$\mu = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{1 + 3 \cos^2 \varphi}$$

в результате преобразования которого получим два корня

$$\varphi_1 = \arctan \frac{3 - \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu}, \varphi_2 = \arctan \frac{3 + \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu}$$

откуда

$$\arctan \frac{3 - \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu} \leq \varphi \leq \arctan \frac{3 + \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu}$$

что идентично ответу, полученному первым способом.

Ответ:

$$\arctan \frac{3 - \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu} \leq \varphi \leq \arctan \frac{3 + \sqrt{9 - 16\mu^2}}{2\mu}$$

B1 ^{0.20} Выразите v_x через ω , L и φ .

В данном случае скорость точки A направлена вертикально, поэтому

$$v_x = \omega L \cos \varphi$$

Ответ:

$$v_x = \omega L \cos \varphi$$

B2 ^{0.60} Выразите v_y через v_0 , ω , L и φ .

Момент импульса стержня относительно точки A при ударе сохраняется. Выражение для него

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + m[\vec{AO} \times \vec{v}_O] = \frac{mL^2\vec{\omega}}{3} + m[\vec{AO} \times \vec{v}_O]$$

Таким образом

$$mLv_0 \sin \varphi = mLv_y \sin \varphi + mLv_x \cos \varphi + \frac{mL^2\omega}{3}$$

Учитывая связь v_x и ω , найденную в предыдущем пункте

$$v_y = v_0 - \frac{\omega L(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi}$$

Ответ:

$$v_y = v_0 - \frac{\omega L(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi}$$

В3 0.80

Найдите максимальную энергию W , ушедшую на деформацию поверхности. Ответ выразите через m , v_0 и φ .

Для v_{Ay} имеем

$$v_{Ay} = v_y - \omega L \sin \varphi = v_0 - \frac{4\omega L}{3 \sin \varphi}$$

Для энергии деформации поверхности E_N имеем

$$E_N = \int N v_{Ay} dt$$

Но из теоремы о движении центра масс и пункта B2 имеем

$$N = -m\dot{v}_y = \frac{m\dot{\omega}L(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi}$$

Тогда

$$E_N(\omega) = \int_0^\omega \frac{m(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi} \left(v_0 - \frac{4\omega L}{3 \sin \varphi} \right) L \dot{\omega} dt = \frac{m(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi} \left(v_0 \omega L - \frac{2\omega^2 L^2}{3 \sin \varphi} \right)$$

Максимальное значение W достигается при $v_{A_y} = 0$, т.е в этот момент

$$\omega L = \frac{3v_0 \sin \varphi}{4}$$

откуда

$$W = \frac{mv_0^2(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{8}$$

второй способ

Максимум энергии, ушедшей на деформацию достигается при $v_A = 0$. Тогда из закона сохранения момента импульса

$$mv_0 L \sin \varphi = \frac{4mL^2\omega}{3}$$

откуда

$$\omega = \frac{3v_0 \sin \varphi}{4}$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mL^2\omega^2}{3} + W$$

Откуда

$$W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{3mv_0^2 \sin^2 \varphi}{8} = \frac{mv_0^2(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{8}$$

Ответ:

$$W = \frac{mv_0^2(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{8}$$

В4 1.20

Найдите $\omega_{\text{к}}$ после удара. Ответ выразите через v_0 , L , φ и k .

В конце удара

$$E_N = E_{\text{деф}} = W(1 - k) = \frac{mv_0^2(1 + 3 \cos^2 \varphi)(1 - k)}{8}$$

откуда

$$\frac{m(1 + 3 \cos^2 \varphi)}{3 \sin \varphi} \left(v_0 \omega L - \frac{2 \omega^2 L^2}{3 \sin \varphi} \right) = \frac{mv_0^2(1 + 3 \cos^2 \varphi)(1 - k)}{8}$$

или

$$\omega^2 L^2 - \frac{3 v_0 \omega L \sin \varphi}{2} + \frac{9 v_0^2 \sin^2 \varphi (1 - k)}{16}$$

Решая квадратное уравнение

$$\omega = \frac{3 v_0 \sin \varphi (1 \pm \sqrt{k})}{4 L}$$

Необходимо выбрать больший из корней. Таким образом

$$\omega_{\text{к}} = \frac{3 v_0 \sin \varphi (1 + \sqrt{k})}{4 L}$$

Ответ:

$$\omega_{\text{к}} = \frac{3 v_0 \sin \varphi (1 + \sqrt{k})}{4 L}$$

B5 ^{0.30}

Найдите скорость точки A стержня $v_{A\text{к}}$ сразу после удара. Ответ выразите через v_0 , φ и k .

$$v_{Ay} = v_0 - \frac{4 \omega_{\text{к}} L}{3 \sin \varphi} = -v_0 \sqrt{k}$$

или

$$v_{A\text{к}} = v_0 \sqrt{k}$$

Ответ:

$$v_{A\text{к}} = v_0 \sqrt{k}$$

B6 ^{0.40}

На каком расстоянии L_{AC} от точки A находится точка C стержня, скорость которой сразу после удара минимальна?

Ответ выразите через L , φ и k .

Найдём точку, не имеющую компоненту скорости, направленную перпендикулярно стержню, её скорость будет минимальна

$$L_{AC} = \frac{v_{A\text{к}} \sin \varphi}{\omega_{\text{к}}} = L \frac{4 \sqrt{k}}{3(1 + \sqrt{k})}$$

Ответ:

$$L_{AC} = L \frac{4 \sqrt{k}}{3(1 + \sqrt{k})}$$

C1 ^{0.40}

Выразите ω и v_y через v_x , v_0 , L , μ и φ .

ω была найдена ранее

$$\omega = \frac{3 v_x}{\mu L} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

Из теоремы о движении центра масс

$$m \dot{v}_y = -N$$

откуда

$$v_y = v_0 - \frac{v_x}{\mu}$$

Ответ:

$$\omega = \frac{3v_x}{\mu L}(\sin \varphi - \mu \cos \varphi),$$
$$v_y = v_0 - \frac{v_x}{\mu}$$

C2^{1.20} Найдите максимальную энергию W , ушедшую на деформацию поверхности. Ответ выразите через m , v_0 , μ и φ .

Для v_{Ay} имеем

$$v_{Ay} = v_y - \omega L \sin \varphi = v_0 - \frac{v_x}{\mu} - \frac{3v_x \sin \varphi}{\mu}(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

и также

$$N = \frac{m\dot{v}_x}{\mu}$$

откуда

$$E_N = \int N v_{Ay} dt = \int_0^{v_x} \frac{m}{\mu^2} (\mu v_0 - v_x (1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))) dv_x$$

или

$$E_N = \frac{m}{\mu^2} \left(\mu v_0 v_x - \frac{v_x^2 (1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}{2} \right)$$

Максимальное значение W достигается при $v_{Ay} = 0$, т.е в этот момент

$$v_x = \frac{\mu v_0}{1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}$$

откуда

$$W = \frac{mv_0^2}{2(1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

Ответ:

$$W = \frac{mv_0^2}{2(1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

C3^{1.40} Найдите $v_{xк}$ после удара. Ответ выразите через v_0 , μ , φ и k .

В конце удара

$$E_N = E_{\text{деф}} = W(1 - k) = \frac{mv_0^2(1 - k)}{2(1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

откуда

$$\frac{m}{\mu^2} \left(\mu v_0 v_x - \frac{v_x^2 (1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}{2} \right) = \frac{mv_0^2(1 - k)}{2(1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

или

$$v_x^2 - \frac{2\mu v_0 v_x}{1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} + \frac{\mu^2 v_0^2(1 - k)}{(1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))^2} = 0$$

Решая квадратное уравнение

$$v_x = \frac{\mu v_0(1 \pm \sqrt{k})}{(1 + 3 \sin \varphi(\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

Необходимо выбрать больший из корней. Таким образом

$$v_{xк} = \frac{\mu v_0(1 + \sqrt{k})}{(1 + 3 \sin \varphi(\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

Ответ:

$$v_{xк} = \frac{\mu v_0(1 + \sqrt{k})}{(1 + 3 \sin \varphi(\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}$$

С4 1.00

Найдите работу силы трения $A_{\text{тр}}$ в процессе удара. Ответ выразите через m , v_0 , μ , φ и k .

Для работы силы трения имеем

$$A_{\text{тр}} = \int F_x v_{Ax} dt = \int_0^{v_x} m v_x \left(1 - \frac{3 \cos \varphi}{\mu} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)\right) dv_x$$

или

$$A_{\text{тр}} = \frac{m v_x^2}{2} \left(1 - \frac{3 \cos \varphi}{\mu} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)\right)$$

Подставляя найденное значение v_x

$$A_{\text{тр}} = \frac{\mu m v_0^2 (1 + \sqrt{k})^2 (\mu - 3 \cos \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}{2 (1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))^2}$$

Ответ:

$$A_{\text{тр}} = \frac{\mu m v_0^2 (1 + \sqrt{k})^2 (\mu - 3 \cos \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))}{2 (1 + 3 \sin \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi))^2}$$