

A1^{0.40} Чему равна скорость спутников v в момент запуска? Ответ выразите через G , M_3 и R_3 .

Так как при выведении только одного из спутников на орбиту его траектория будет представлять из себя параболу, то скорость v равна второй космической скорости для Земли, то есть:

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3}}$$

A2^{0.60} На каком расстоянии от центра Земли R_0 находится точка P пересечения траекторий спутников? Ответ выразите через R_3 .

Для движения по параболе

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

В точке старта спутников

$$R_3 = \frac{p}{2}$$

откуда

$$p = 2R_3$$

где p - фокальный параметр. Далее, поскольку орбиты симметричны, параметр θ равен $\frac{\pi}{2}$ для обоих спутников, откуда

Ответ:

$$R_0 = 2R_3$$

A3^{0.80} Чему равен угол φ между направлениями скоростей спутников в точке P ?

Для каждого из спутников в точке P можно найти из закона сохранения энергии

$$v_P = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Из закона сохранения момента импульса

$$vR_3 = v_{\perp}R_0 = 2Rv_{\perp}$$

Откуда

$$\frac{v_{\perp}}{v_P} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значит, вектор скорости в точке P составляет угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с радиус вектором.

Тогда из симметрии орбит

$$\varphi = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Также ответ может быть легко получен из оптического свойства параболы.

Ответ:

$$\varphi = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

A4^{1.50} Найдите время t_0 , через которое спутники достигают точки P . Ответ выразите через G , R_3 и M_3 .

Выражение для секториальной скорости следующее

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \sqrt{\frac{GM_3R_3}{2}}$$

Откуда

$$t_0 = \frac{S}{\sqrt{\frac{GM_3R_3}{2}}}$$

где S - площадь, заметаемая радиус-вектором от точки старта до точки P .
Направим ось y по направлению на точку старта из центра Земли, а ось x перпендикулярно ей. Из уравнения параболы в полярных координатах

$$p = r(1 + \cos \theta) = r + y$$

откуда

$$r^2 = y^2 + x^2 = p^2 + y^2 - 2py$$

Получаем

$$y(x) = \frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p} = R - \frac{x^2}{4R}$$

Тогда

$$S = \int\limits_0^{2R_3} ydx = \int\limits_0^{2R} \left(R - \frac{x^2}{4R}\right) dx = 2R^2 - \frac{8R^3}{12R^2} = \frac{4R^2}{3}$$

отсюда

Ответ:

$$t_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{R_3^3}{GM_3}}$$

В1 0.70

Считая, что вблизи точки P спутники двигались вдоль прямых, направления которых совпадали с направлениями их скоростей в данной точке, найдите относительную скорость спутников v_0 , а также минимальное расстояние b между ними, пренебрегая их гравитационным взаимодействием. Ответ выразите через v и τ .

Обозначим за v_P скорость спутников в точке P .
Скорости спутников в точке P взаимно перпендикулярны, значит относительная скорость $v_0 = v_P\sqrt{2}$ и

Ответ:

$$v_0 = v$$

В момент, когда спутник 1 проходит точку P , спутник 2 находится от неё на расстоянии $l = v_P\tau$, а угол между вектором относительной скорости и относительным радиус-вектором частицы 1 равен $\frac{3\pi}{4}$. Таким образом $b = \frac{l}{\sqrt{2}}$ и

Ответ:

$$b = \frac{v\tau}{2}$$

В2 1.00

Найдите u . Ответ выразите через v .

Модули начальной и конечной относительных скоростей спутника 1 совпадают. Из закона сложения скоростей

$$\vec{u} = \vec{v}_{2P} + \vec{v}_{\text{отн}}$$

Пусть β - угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}_{\text{отн}}$. Тогда из теоремы синусов

$$\frac{v_P}{\sin(\beta)} = \frac{v_0}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

откуда

$$\beta = \frac{\pi}{6}$$

Для v_1 получаем

$$u = v_P \cos \frac{\pi}{4} + v_0 \cos \beta$$

Ответ:

$$u = v_P \cos \frac{\pi}{4} + v_0 \cos \beta = v \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

ВЗ 2.30

Найдите τ . Ответ выразите через G , M_2 , M_3 и R_3 .

Для эксцентриситета имеем

$$e = \frac{1}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

Выражение для эксцентриситета

$$e = \sqrt{1 + \frac{v^4 b^2}{G^2 M_2^2}}$$

Откуда

$$\frac{4}{2 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{v^4 b^2}{G^2 M_2^2}$$

Или

$$2 - \sqrt{3} = \frac{v^2 b}{GM_2} = \frac{2bM_3}{R_3 M_2}$$

Откуда

Ответ:

$$\tau = (2 - \sqrt{3}) \sqrt{\frac{R_3^3}{2GM_3} \cdot \frac{M_2}{M_3}}$$

С1 1.00

Найдите скорость v_∞ спутника 1 на бесконечно большом удалении от Земли. Ответ выразите через v .

Из закона сохранения энергии

$$\frac{E}{M_1} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_3}{2R_3} = \frac{v_\infty^2}{2}$$

Учитывая полученные ранее соотношения

$$v^2 \cdot \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{8} - \frac{v^2}{4} = \frac{v_\infty^2}{2} = v^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

Откуда

Ответ:

$$v_\infty = v \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}$$

С2 1.50 Найдите угол φ_∞ между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}_\infty$.

Выражение для эксцентриситета орбиты следующее

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty \cdot u \cdot 2R}{GM_3}\right)^2} = \sqrt{1 + \left((1 + \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2}\right)^2}$$

Откуда

Ответ:

$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2(1 + \sqrt{3})^3}}\right)$$

С3 0.20 Возможно ли действительно вывести спутник на орбиту таким образом? Ответ обоснуйте.

Гравитация– самое "слабое" из четырёх фундаментальных взаимодействий. Основное проявление гравитации, с которым мы встречаемся в повседневной жизни – гравитационное поле Земли; хотя таким образом взаимодействуют между собой любые предметы, имеющие массу, этим взаимодействием почти всегда можно пренебречь. Приведем количественные оценки вопроса о том, могут ли два искусственных спутника Земли столь существенно повлиять на траектории друг на друга.
Масса самый тяжёлых *способных передвигаться* сооружений, построенных человечеством, может достигать нескольких сотен тысяч тонн (например, авианосцы). Предположим, что масса $M_2 \sim 10^9$ кг. Тогда, для выполнения манёвра, указанного в задаче, прицельный параметр b по порядку величины можно оценить как

$$b \sim \frac{M_2}{M_3} R_3$$

Используя $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ м, получим:

$$b \sim 10^{-9} \text{ м,}$$

что сравнимо с межатомными расстояниями. Как и следовало ожидать, в реальности гравитационное притяжение спутника пренебрежимо мало.

Ответ: Нет