

A1^{0.80} Пусть общее число молей газа углекислого газа в закрытой бутылке $\nu_0 = 0.05$ моль, объем жидкости $V_L = 250$ мл, объем газа $V_G = 5$ мл. Найдите давление P углекислого газа в бутылке. Приведите также численное значение. \textbf{В дальнейших пунктах считайте, что жидкость находится в открытом сосуде.}

Пусть ν_G – количество вещества углекислого газа в газообразной форме, ν_L – в растворе. Количество вещества в газе можно выразить через давление с помощью уравнения состояния идеального газа. Концентрация углекислого газа в растворе выражается через давление с помощью закона Генри, тогда получаем уравнение

$$\nu_0 = \nu_G + \nu_L = \frac{PV_G}{RT} + cV_L = P \left(\frac{V_G}{RT} + k_H V_L \right),$$

из которого давление

$$P = \frac{\nu_0 RT}{V_G + k_H V_L RT}.$$

Ответ:

$$P = \frac{\nu_0 RT}{V_G + k_H V_L RT} \approx 5.4 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

A2^{0.70} Пузырь с углекислым газом сможет образоваться, только если давление углекислого газа в нем сможет уравновесить давление, создаваемое силами поверхностного натяжения. Найдите минимальный радиус пузырька R^* , который сможет образоваться. Выразите ответ через молярную концентрацию газа в жидкости c , атмосферное давление P_0 , а также физические постоянные, характеризующие жидкость. Чему равна концентрация c , если критический радиус $R^* = 1.5 \cdot 10^{-6}$ м?

Давление углекислого газа в пузырьке должно уравновешивать внешнее давление (которое считаем равным атмосферному давлению P_0) и добавку за счет поверхностного натяжения

$$\frac{2\gamma}{R^*} + P_0 = P_{CO_2} = \frac{c}{k_H}.$$

У пузырька одна поверхность, поэтому поверхностное натяжение создает давление $2\gamma/R$. Решая уравнение, получаем

$$\frac{2\gamma}{R^*} = \frac{c - k_H P_0}{k_H}, \quad R^* = \frac{2\gamma k_H}{c - k_H P_0}.$$

Концентрацию можно рассчитать по формуле

$$c = k_H \left(P_0 + \frac{2\gamma}{R^*} \right) \approx 61 \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}.$$

Ответ:

$$R^* = \frac{2\gamma k_H}{c - k_H P_0}$$

$$c = k_H \left(P_0 + \frac{2\gamma}{R^*} \right) \approx 61 \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}$$

A3^{1.00} Используя приведенные соображения, найдите коэффициент диффузии B . Выразите ответ через k_B , T , β . Определите подвижность молекул β через вязкость η и размер молекул. Найдите численное значение коэффициента диффузии. \textbf{Если вам не удастся решить этот пункт, можете для получения численных ответов в дальнейшем использовать значение} $B = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$.

Средняя скорость движения частицы под действием силы $F_z = F$ равна $v = \beta F$, поэтому сила создает поток $j_z^F = nv = n\beta F$. Концентрация зависит от координаты как

$$n = n_0 e^{-U/kT} = n_0 e^{Fz/kT},$$

поэтому диффузионный поток

$$j_z^D = -B \frac{dn}{dz} = -\frac{B n_0 F}{kT} e^{Fz/kT} = -\frac{B n F}{kT}.$$

В равновесии полный поток должен быть равен нулю:

$$j_z = j_z^F + j_z^D = n\beta F - \frac{B n F}{kT} = 0.$$

Отсюда получаем коэффициент диффузии

$$B = \beta k_B T.$$

Если считать, что на молекулу действует сила вязкого трения $6\pi\beta r v$, то подвижность определяется формулой

$$\beta = \frac{1}{6\pi\eta r}$$

Тогда коэффициент диффузии

$$B = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}.$$

Ответ:

$$B = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \approx 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$$

B1 1.00 Найдите, как диаметр D пузыря зависит от времени. Начальный диаметр считайте приближенно равным нулю, ответ выразите через $f_1, f_2, c, c_i, R, T, P_0$. Давление в пузыре и температуру можно считать постоянными, вкладом поверхностного натяжения и давления столба жидкости в давление газа в пузыре можно пренебречь.

Выразим объем пузыря через количество вещества в нем

$$V = \frac{RT}{P} \nu.$$

Из формулы из условия получим скорость изменения объема

$$\frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{d\nu}{dt} = \frac{RT}{P} \kappa S (c - c_i).$$

Подставим выражения через диаметр:

$$3D^2 f_2 \frac{dD}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{B}{\kappa D} f_1 D^2 (c - c_i)$$

Отсюда получаем уравнение

$$2D \frac{dD}{dt} = \frac{2f_1}{3\kappa f_2} \frac{RT}{P} B (c - c_i),$$

в левой части которого стоит производная квадрата диаметра по времени.

Ответ:

$$D = \sqrt{\frac{2f_1}{3\kappa f_2} \frac{RT}{P} B (c - c_i) t}$$

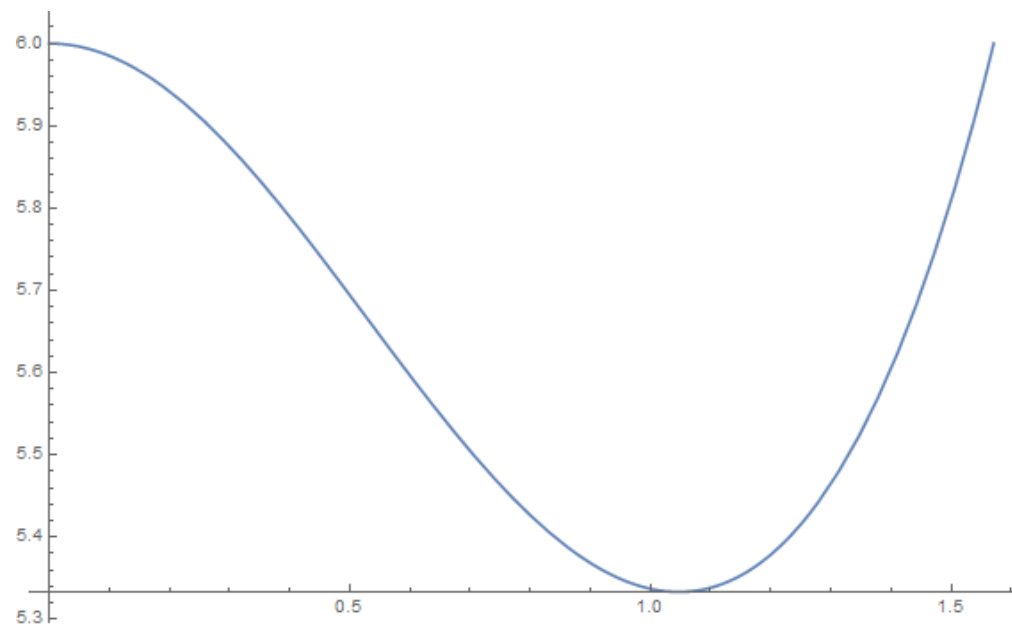
B2 0.70 Найдите выражения для $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$. Постройте (качественно) график отношения f_1/f_2 при $\theta \in (0, \pi/2)$.

Поверхность участка сферы равна произведению квадрата радиуса $D^2/4$ на телесный угол, под которым он виден из центра, поэтому

$$f_1 = \frac{\pi}{2} (1 + \cos \theta)$$

Объем части сферы можно найти как сумму объема шарового сектора, видимого под тем же телесным углом, и конуса. Получим

$$f_2 = \frac{\pi}{24} (2 + 3 \cos \theta - \cos^3 \theta)$$



Ответ:

$$f_1 = \frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$f_2 = \frac{\pi}{24}(2 + 3 \cos \theta - \cos^3 \theta)$$

B3 0.30 Найдите радиус пузыря R , при котором он оторвется от поверхности. Считайте, что он крепится к поверхности по окружности радиуса $a_d \ll R$, угол между пузырьком и поверхностью равен θ ,

Сила поверхностного натяжения должна уравновесить действующую на пузырь силу Архимеда

$$2\pi a_d \gamma \sin \theta = \frac{4\pi}{3} \rho g R^3$$

Ответ:

$$R = \left(\frac{3a_d \gamma \sin \theta}{2\rho g} \right)^{1/3}$$

B4 0.80 После того, как пузырь оторвался от поверхности, вблизи нее остается участок жидкости с пониженной концентрацией растворенного углекислого газа. Из-за этого до того момента, когда в том же месте начнет формироваться следующий пузырь, должно пройти некоторое время t_n . Считайте, что концентрация углекислого газа понижена в области размера D_m , а глубина дефекта, которую нужно заполнить углекислым газом равна $h \ll D_m$. Зависимость концентрации от расстояния до поверхности линейная. Найдите время t_n , за которое пузырь, возникший на дне дефекта, вырастет до поверхности стекла. Концентрация вблизи дефекта равна минимальной концентрации c_n , при которой возможно существование пузырька, зависимость концентрации от расстояния можно считать линейной.

Из-за разности концентраций возникает поток углекислого газа

$$j = B \frac{c - c_n}{D_m}.$$

Заметим, что один и тот же коэффициент диффузии связывает как поток молекул с разностью концентраций, так и молярный поток с разность молярных концентраций, поскольку обычная и молярная концентрации пропорциональны друг другу.

Пусть площадь дефекта S . Объем пузыря связан с количеством вещества в нем

$$V = \nu \frac{RT}{P}.$$

Скорость изменения количества вещества в пузыре

$$\frac{d\nu}{dt} = jS = \frac{c - c_n}{D_m} BS = \frac{P}{RT} \frac{dV}{dt} = \frac{PS}{RT} \frac{dh}{dt}$$

Отсюда следует, что дефект заполняется с постоянной скоростью

$$\frac{dh}{dt} = \frac{RT}{P} B \frac{c - c_n}{D_m},$$

и время формирования пузыря

$$t_n = \frac{P}{RT} \frac{hD_m}{B(c - c_n)}.$$

Ответ:

$$t_n = \frac{P}{RT} \frac{hD_m}{B(c - c_n)}$$

B5^{0.70} Пусть t_g – время, за который пузырь вырастает от края дефекта до своего максимального диаметра D_m . При изменении концентрации углекислого газа в жидкости это время, как и время формирования пузыря t_n могут меняться. В каких координатах зависимость t_g от t_n будет иметь линейный вид?

Время роста пузыря до максимального диаметра можно найти из результатов пункта B1:

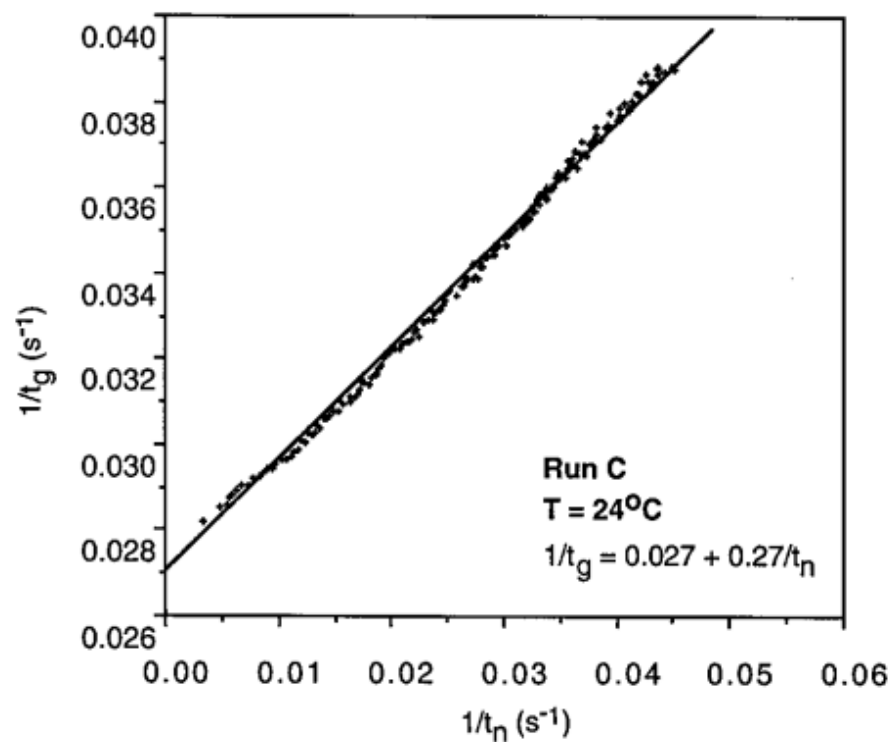
$$t_g = \frac{D_m^2}{K_1(c - c_i)},$$

где K_1 – некоторая постоянная, не зависящая от концентраций. D_m определяется в основном равновесием сил поверхностного натяжения и силы Архимеда, поэтому также не зависит от концентрации.

Тогда зависимости обратных времен от концентрации углекислого газа в растворе линейны:

$$\frac{1}{t_g} \sim c - c_i, \quad \frac{1}{t_n} \sim c - c_n.$$

Поэтому зависимость между самими обратными временами также должна быть линейной.



Ответ: Зависимость в координатах $1/t_g$ от $1/t_n$.

C1^{0.40} Скорость всплывания пузырька определяется действующей на него силой вязкого трения, которую можно рассчитать по формуле Стокса $F = 6\pi\eta aU$, где a – радиус пузырька, U – скорость пузырька, η – вязкость жидкости. Найдите скорость всплывания пузырька радиуса a .

Считаем, что скорость пузыря устанавливается достаточно быстро. Тогда она определяется равновесием между силой вязкого трения и силой Архимеда

$$\rho g \frac{4\pi}{3} a^3 = 6\pi\eta aU.$$

Отсюда скорость

$$U = \frac{2\rho g}{9\eta} a^2.$$

Ответ:

$$U = \frac{2\rho g}{9\eta} a^2$$

C2^{0.60} Найдите скорость изменения радиуса пузырька da/dt . Выразите ответ через a , разность концентраций Δc , температуру T , атмосферное давление P_0 , Δc и физические постоянные.

Найдем значение коэффициента K для пузырька:

$$K = 0.63B^{2/3} \frac{U^{1/3}}{a^{2/3}} = 0.63B^{2/3} \left(\frac{2\rho g}{9\eta} \right)^{1/3} = 0.38B^{2/3} \left(\frac{\rho g}{\eta} \right)^{1/3}.$$

Оказывается, оно не зависит от радиуса.
Аналогично части В свяжем выразим скорость изменения объема:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{RT}{P} \frac{d\nu}{dt} = \frac{RT}{P} KS\Delta c.$$

Изменение объема связано с изменением радиуса соотношением

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{da}{dt} = \frac{RT}{P} KS\Delta c,$$

откуда

$$\frac{da}{dt} = 0.38B^{2/3} \left(\frac{\rho g}{\eta} \right)^{1/3} \frac{RT}{P} \Delta c = v.$$

Эта скорость не зависит от радиуса пузырька.

Ответ:

$$\frac{da}{dt} = 0.38B^{2/3} \left(\frac{\rho g}{\eta} \right)^{1/3} \frac{RT}{P} \Delta c$$

C3^{0.80} Пузырек всплывает со дна сосуда, начальный радиус a_0 . Найдите его радиус a и объем V_b вблизи поверхности.

Запишем уравнение для роста радиуса пузырька

$$\frac{da}{dt} = v,$$

а также для движения пузырька (h – высота подъема)

$$\frac{dh}{dt} = U = \frac{2\rho g}{9\eta} a^2.$$

Отсюда

$$\frac{da}{dh} = \frac{1}{a^2} \frac{9\eta v}{2\rho g}.$$

Интегрируя, получаем

$$a^3 = \frac{27\eta v}{2\rho g} h + a_0^3.$$

Ответ:

$$a = \left(\frac{27\eta v}{2\rho g} h + a_0^3 \right)^{1/3}$$

$$V_b = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{27\eta v}{2\rho g} h + a_0^3 \right)$$

где $v = 0.38B^{2/3} \left(\frac{\rho g}{\eta} \right)^{1/3} \frac{RT}{P} \Delta c$

C4^{1.50} Пузырьки будут образовываться, пока концентрация углекислого газа в жидкости не упадет от начального значения c до некоторого критического значения c_n , при котором пузыри перестанут образовываться. Найдите общее число пузырей N , которые смогут появиться за все время. Выразите ответ через объем жидкости V_L , ее глубину h , начальную и конечную концентрации углекислого газа и постоянные, характеризующие жидкость и газ.

Найдите также численное значение. Используйте данные $c = 100 \text{ моль/м}^3$, $c_n = 50 \text{ моль/м}^3$, $V_L = 0.5 \text{ литра}$, диаметр сосуда $\xi = 6 \text{ см}$.

Считайте, что концентрация вблизи поверхности пузырька такая, что газ углекислый газ в пузырьки находится в равновесии с растворенным в жидкости. Все пузыри всплывают со дна сосуда, а их начальный радиус равен нулю. Изменением концентрации за время от образования пузырька до того, как он достигнет поверхности, можно пренебречь.

С каждым пузырьком из жидкости выходит количество вещества углекислого газа

$$\nu_b = 10.7 \left(\frac{B\eta}{\rho g} \right)^{2/3} h \Delta c.$$

Его можно получить, умножив объем пузырька на P/RT . Разность концентраций вблизи пузырька и в объеме жидкости

$$\Delta c = c - k_H P_0$$

Изменение концентрации углекислого газа в жидкости при выходе одного пузырька

$$dc = -\frac{\nu_b}{V_L}.$$

Число вышедших пузырьков связано с изменением концентрации соотношением

$$dN = -\frac{dc V_L}{\nu_b} = -0.093 \left(\frac{\rho g}{B\eta} \right)^{2/3} \frac{V_L}{h} \frac{dc}{c - k_H P_0}$$

Интегрируя, находим число пузырьков

$$N = 0.093 \left(\frac{\rho g}{B\eta} \right)^{2/3} \frac{V_L}{h} \ln \frac{c - k_H P_0}{c_n - k_H P_0} \approx 1.1 \cdot 10^7$$

Численное значение приведено для правильного коэффициента диффузии. Для приближенного значения $5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ получим $N \approx 4.6 \cdot 10^6$.

Ответ:

$$N = 0.093 \left(\frac{\rho g}{B\eta} \right)^{2/3} \frac{\pi \xi^2}{4} \ln \frac{c - k_H P_0}{c_n - k_H P_0} \approx 1.1 \cdot 10^7$$

С5^{0.70}

Предположим, что все образовавшиеся в процессе пузырьки не разрушаются, а их размеры равны размерам пузырьков, достигающих поверхности жидкости при конечной концентрации углекислого газа. Пена какой высоты H образуется на поверхности жидкости?

Высота пены связана с объемом пузырей соотношением $H = V/S$, где объем пены $V = V_b N$. Объем пузыря, отвечающий конечному значению концентрации

$$V_b = 10.7 \left(\frac{B\eta}{\rho g} \right)^{2/3} h (c_n - k_H P_0) \frac{RT}{P},$$

объем пены

$$V = \frac{\pi \xi^2}{4} h (c_n - k_H P_0) \frac{RT}{P} \ln \frac{c - k_H P_0}{c_n - k_H P_0},$$

а значит ее высота

$$H = \frac{RT}{P} (c_n - k_H P_0) h \ln \frac{c - k_H P_0}{c_n - k_H P_0} \approx 0.53 h.$$

Здесь используется высота столба жидкости $h = V/(\pi \xi^2/4) \approx 17.7 \text{ см}$.

Ответ:

$$H = \frac{RT}{P} (c_n - k_H P_0) h \ln \frac{c - k_H P_0}{c_n - k_H P_0} \approx 0.53 h \approx 9 \text{ см}$$