

Road to IPhO

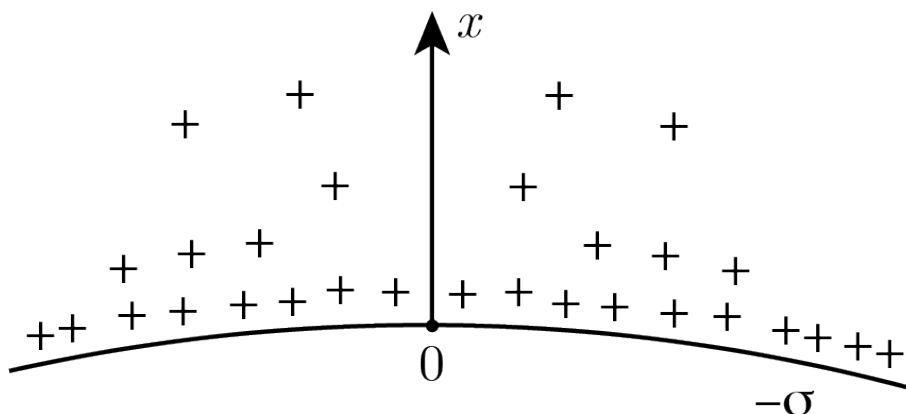
Клеточные мембраны

Электрические взаимодействия играют важную роль в живых организмах. Если поместить молекулу кислоты, к примеру, ДНК, в воду, то некоторые слабо связанные с ней атомы могут диссоциировать. Положительные ионы будут покидать молекулу, делая её тем самым отрицательно заряженной. Точно так же и клеточные мембраны в воде будут заряжаться отрицательно, а электростатическое отталкивание между ними предотвращает «слипание» макромолекул, мембран и клеток. Поскольку вещество в целом электрически нейтрально, то большое количество положительных ионов в растворе вызовет ослабление силы взаимодействия между мембранами с расстоянием. При решении задачи считайте, что температура всюду равна комнатной T .

Клеточную мембрану можно считать равномерно заряженной сферой с поверхностной плотностью заряда $(-\sigma)$. В мембрану заключено нейтральное содержимое клетки. Мембрана окружена раствором с диэлектрической проницаемостью ε . Положительные ионы плавают в тонком слое этого раствора вблизи внешней поверхности мембраны. Рассмотрим фрагмент мембраны и прилегающий к нему слой. В этой области считайте поле мембраны однородным. Ось x с началом на мембране направим перпендикулярно ей (см. рис.).

Система находится в тепловом равновесии с окружающей средой. Из-за электростатического взаимодействия плотность положительных ионов в растворе неоднородна, но можно считать, что каждая часть локально находится в равновесии. Поведение положительных ионов при этом аналогично поведению молекул в атмосфере с тем лишь исключением, что на положительные ионы действует электрическое поле, а на молекулы атмосферы – гравитационное. Примем концентрацию положительных ионов n_0 у самой поверхности мембраны за неопределённую постоянную. Заряд электрона $-e$, заряд положительного иона $+e$, постоянная Больцмана k , электрическая постоянная ε_0 .

Силу тяжести и вязкость воды не учитывайте.



A1 Запишите дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал электрического поля φ . **1.0**

Подсказка: согласно распределению Больцмана, концентрация n частиц с энергией E пропорциональна $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, где T – абсолютная температура среды.

Потенциал на поверхности клеточной мембраны выбирается равным нулю.

A2 Запишите граничные условия, которым удовлетворяет потенциал φ на поверхности мембраны, т.е. найдите $\varphi(0)$, $\frac{d\varphi}{dx}(0)$. **0.3**

При некоторых условиях решение дифференциального уравнения, полученного в пункте **A1**, удовлетворяющее граничным условиям, полученным в пункте **A2**, можно представить в виде логарифмической функции: $\varphi(x) = A_1 \ln(1 + B_1 x)$.

A3 Определите n_0 , A_1 и B_1 . Выразите $\varphi(x)$ и $n(x)$ (концентрацию положительных ионов в точке x) через σ , ε , ε_0 , T , e и k . **0.8**

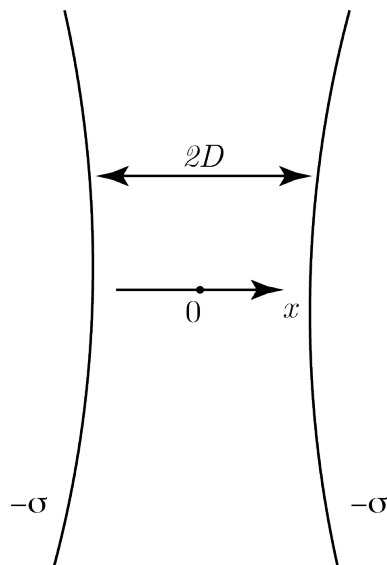
Road to IPhO

A4 Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

0.4

A5 В расчете на единицу площади мембраны найдите энергию электрического поля U_f и сумму потенциальных энергий положительных ионов U_e в этом поле. **1.5**

Рассмотрим теперь ситуацию, когда две клетки расположены близко друг к другу. Упрощенная модель выглядит следующим образом: две одинаковые большие сферические поверхности расположены так, что зазор между ними равен $2D$, при этом величина зазора много меньше радиуса кривизны поверхностей. Обе мембраны равномерно заряжены зарядом с поверхностной плотностью $-\sigma$. В качестве начала координат выберем середину зазора, ось x направим перпендикулярно мембранам, а потенциал в начале координат примем равным нулю. За неопределённую постоянную вновь примем концентрацию положительных ионов n_0 при $x = 0$. Зависимость потенциала от координаты можно искать в виде $\varphi(x) = A_2 \ln [\cos(B_2 x)]$.



B1 Определите A_2 и B_2 . Выразите ответ через T , ε , ε_0 , e , k и n_0 .

0.8

B2 Введём величину $\theta = B_2 D$.

0.5

Из граничных условий на поверхности мембраны получите уравнение, связывающее θ и e , σ , D , ε , ε_0 , k и T .

B3 Выразите n_0 через D , σ , ε , ε_0 , T , e , k и θ .

0.4

B4 Найдите разность $\Delta n \equiv n(\pm D) - n_0$ между концентрациями положительных ионов у поверхности двух мембран и посередине между ними. Выразите ответ через σ , ε , T и k . **0.5**

B5 Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

0.5

B6 Найдите полную силу f , действующую на единицу площади мембраны. Гидростатическим давлением можно пренебречь. Ответ выразите через e , D , θ , ε , ε_0 , k и T . **1.5**

Подсказка: положительные ионы в воде ведут себя как идеальный газ и локально находятся в тепловом равновесии.

B7 Для сравнительно малых расстояний D зависимость $f(D)$ имеет вид: $f = k_1 D^\alpha$, а для больших: $f = k_2 D^\beta$. Найдите α и β . **1.8**