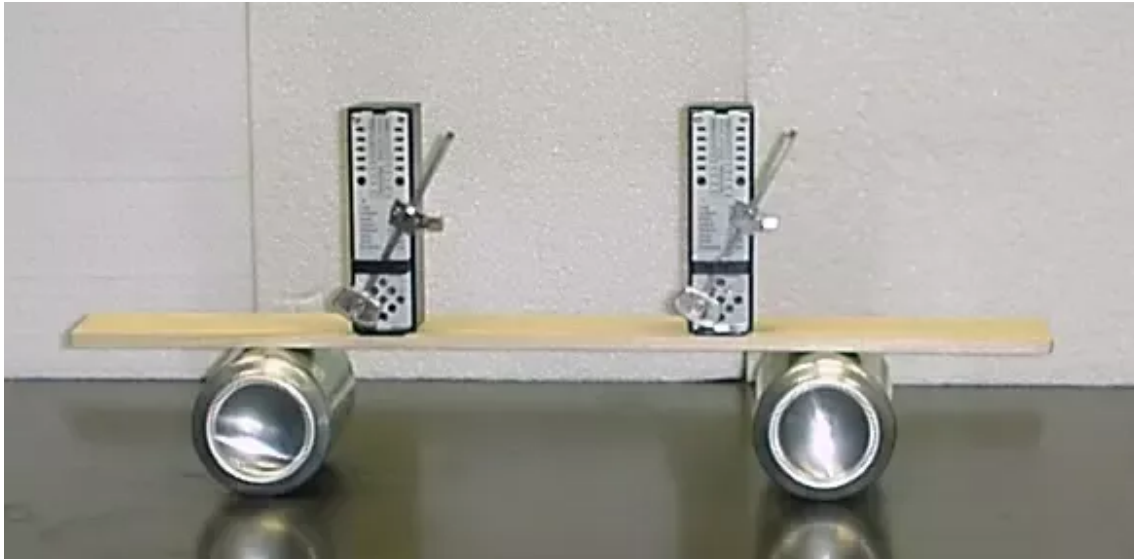


Road to IPhO

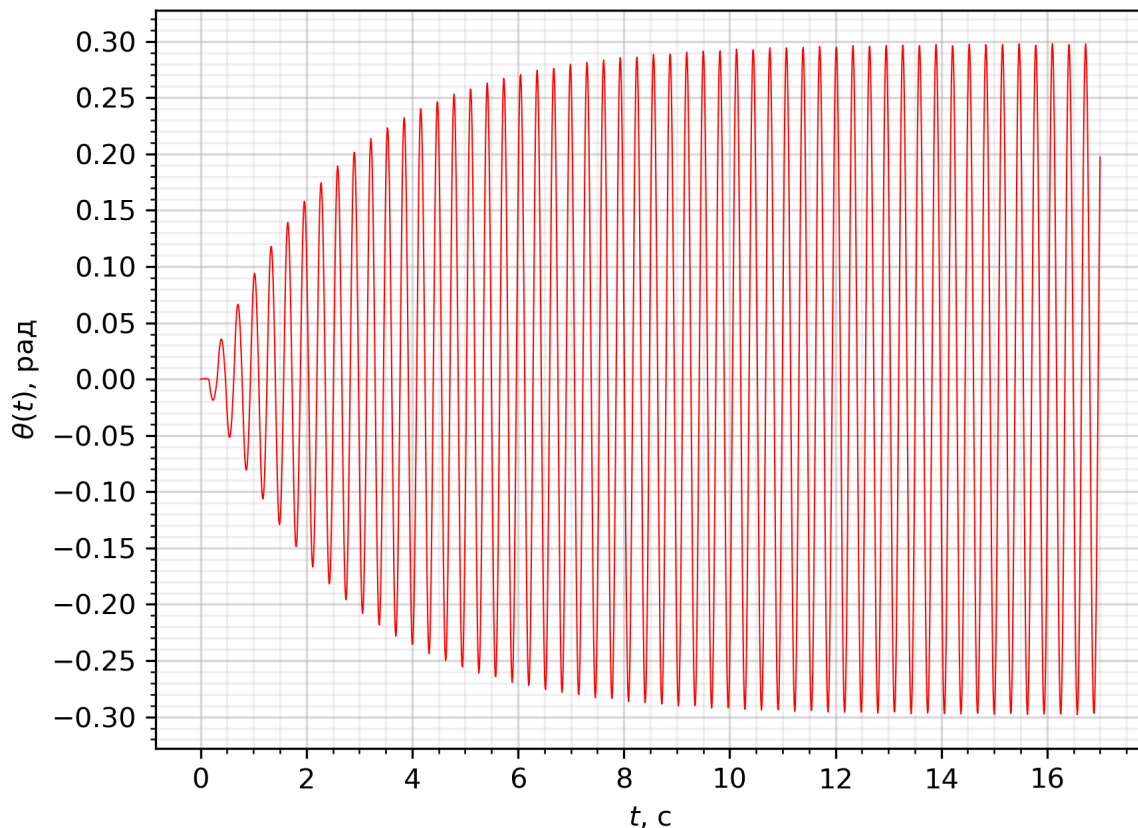
Синхронизация метрономов

Если поставить два метронома на подвижную платформу и запустить, то через некоторое время они синхронизируются, то есть будут качаться в фазе. В этой задаче Вам предлагается объяснить явление синхронизации.



Часть А. Устройство метронома (1.5 балла)

Метроном – это прибор, отмечающий короткие промежутки времени равномерными ударами. В нашей модели его основой является математический маятник с длиной l и массой m . Чтобы колебания не затухли из-за сопротивления воздуха, нужен механизм подкачки энергии – спусковой механизм. Предположим, что когда маятник проходит положение равновесия, спусковой механизм ударом сообщает момент импульса $ml^2\omega_D$ по направлению движения, и в этот момент мы слышим характерный щелчок. Будем считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости v и равна $f = 2\gamma mlv$.



Road to IPhO

- A1** По графику расчески колебаний метронома найдите с точностью 10%: угловую частоту ω , установившуюся амплитуду A , коэффициент затухания γ и угловую скорость ω_D сообщаемую спусковым механизмом при ударе. Известно, что $\frac{\omega_D}{\omega}$, $\gamma \ll 1$. **1.5**

Часть В. Нелинейность (2.2 балла)

Для описания синхронизации важно, что уравнения колебаний не являются в точности линейными. В этой части задачи вы познакомитесь с методом Ван дер Поля, позволяющим учесть нелинейность. Например, пусть уравнение колебаний содержит кубическую поправку:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x^3.$$

При $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$ решение можно было бы представить в виде

$$x(t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}(A(t)e^{i\omega t} + A(t)^*e^{-i\omega t})$$

где A – комплексная амплитуда. Здесь и в дальнейшем $*$ обозначает комплексное сопряжение, а точка над некоторой величиной – ее производную по времени. При $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ значение A постоянно, а в общем случае A изменяется со временем.

- B1** Выразите $\dot{x}(t)$ через $A(t)$ и $A^*(t)$. **0.2**

Заметим, что по сути мы вместо вещественной переменной x ввели комплексную переменную A , в которой теперь есть мнимая часть, не зависящая от вещественной. Таким образом, можно потребовать, чтобы функция $A(t)$ удовлетворяла одному произвольному соотношению. Удобно выбрать это соотношение в виде $\dot{A}e^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} = 0$, чтобы $\dot{A}$ не входило в выражение для $\dot{x}$. В дальнейшем считайте, что это условие выполнено.

- B2** Выразите $\ddot{x}(t)$ через $A(t)$, $A^*(t)$, $\dot{A}(t)$. **0.3**

- B3** Используя уравнение колебаний, найдите выражение для $\dot{A}$ через A , γ , ω , ε . **0.5**

Предположим, что затухание и нелинейность малы. В этом случае амплитуда A изменяется очень медленно, а потому вклад быстро меняющихся членов оказывается пренебрежимо малым. Это означает, что в уравнении можно отбросить слагаемые с экспонентами типа $e^{in\omega t}$ при $n \neq 0$.

- B4** Учитывая это, напишите упрощенное уравнение на $\dot{A}(t)$. **0.2**

- B5** Предположим, что трения нет, $\gamma = 0$. Пусть начальное значение A равно A_0 . Решите уравнение из B4 и получите $A(t)$ и $x(t)$. **0.6**

- B6** Найдите первую поправку $\Delta\omega$ к частоте колебаний, описываемых уравнением **0.4**

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

с небольшой амплитудой $A \ll 1$. Чему равна $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ при амплитуде найденной в A1?

Часть С. Синхронизация (6.3 баллов)

Мы готовы к тому, чтобы объяснить явление синхронизации. Уравнения, возникающие здесь, достаточно сложны и следует огрубить их настолько, насколько возможно, при условии что мы не упустим эффект синхронизации. Мы рассмотрим один из возможных механизмов этого явления. Перейдем к постановке задачи. Два метронома, с массами грузов m и длинами маятника l ставят на платформу, которая покоится на двух легких банках. Масса неподвижной части системы (т.е. всего, кроме грузов маятников) равна M . Введем обозначения: ω – собственная частота малых колебаний маятника, $f_k = D_k ml$ ($k = 1, 2$ – номера метрономов) – сила с которой взаимодействуют спусковой механизм с маятником (D_k отличны от нуля только в короткое время, когда соответствующий метроном проходит положение равновесия), $\alpha = \frac{m}{M}$ –

Road to IPhO

коэффициент связи метрономов, θ_1, θ_2 – углы отклонения маятников от вертикали против часовой стрелки, A_1, A_2 – комплексные амплитуды колебаний маятников, ψ – разность фаз, на которую второй метроном опережает первый. На маятники действует сила сопротивления как в части А, $2\gamma m l v_k$. Влиянием скорости платформы на величину силы сопротивления можно пренебречь. Амплитуды колебаний можно считать малыми, и ограничиться линейными уравнениями.

- C1** Начнем с вспомогательной задачи. Пусть метрономы стоят на неподвижной доске и совершают колебания с известными зависимостями $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$. В первом порядке по амплитудам колебаний найдите силу, действующую на доску. Выразите ответ через $\theta_1, \theta_2, D_1, D_2$ и постоянные, характеризующие метрономы. **0.7**

Теперь учтем, что доска может двигаться. Однако поскольку ее масса $M \gg m$ (то есть $\alpha \ll 1$), ее движение можно учитывать как малую поправку. В дальнейшем считаем, что ускорение доски определяется силой, найденной в предыдущем пункте. Будем решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с доской.

- C2** Напишите уравнения движения грузов в системе отсчета доски, то есть выразите $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ через $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \omega, \gamma, \alpha, D_1, D_2$. **1.0**

В нашей модели метрономы синхронизируются за счет того, что толчок спускового механизма одного метронома влияет на движение второго метронома. При дальнейшем анализе движения учитывайте в уравнении движения первого метронома члены, пропорциональные D_2 и пренебрегите остальными слагаемыми порядка α . Аналогично для второго метронома. При анализе изменения разности фаз будем считать, что амплитуды колебаний метрономов уже установились, то есть за время толчка спусковой механизм сообщает метроному как раз такую дополнительную угловую скорость, чтобы компенсировать затухание с момента предыдущего толчка.

- C3** Фазовая диаграмма колебания – изображение движения маятника на плоскости с координатами $\dot{\theta}, \omega\theta$. **2.0** Предположим, что установился режим колебаний, в котором их амплитуды постоянны, но при этом есть некоторая разность фаз ψ . Постройте фазовую диаграмму первого осциллятора за один период. Укажите на ней точки, в которых срабатывают спусковые механизмы метрономов. Найдите изменение разности фаз между метрономами за период $\Delta\psi$.

- C4** Покажите, что изменение разности фаз между осцилляторами удовлетворяет уравнению Курамото **0.7**

$$\dot{\psi} = -B \sin \psi.$$

Найдите выражение для постоянной B и ее численное значение.

- C5** Предположим, что собственные частоты осцилляторов немного отличаются и равны ω_1 и ω_2 , где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$. Найдите выражение для $\dot{\psi}$ в этом случае. При какой максимальной разности частот $\Delta\omega_{\max}$ возможна синхронизация? **0.8**

- C6** Пусть разность частот $\Delta\omega$ меньше максимальной. Найдите установившуюся разность фаз ψ осцилляторов. **0.2**

- C7** Пусть в системе из двух метрономов разность частот равна $\Delta\omega = 0.1 \text{ с}^{-1}$. При этом разность фаз $\psi = 0.5$ рад. В некоторый момент времени груз одного из метрономов немного смещается и разность частот обращается в 0. Найдите время t , за которое метрономы полностью синхронизируются, то есть их разность фаз станет меньше 0.01 рад. **0.9**