



Обычно при изучении излучения мы фиксируем только интенсивность колебаний. Однако колебания характеризуются не только амплитудой, но и фазой. Если использовать информацию про фазу колебаний, можно получить новые возможности для оптических приборов. Например, записав информацию про фазу на фотопластинке, можно с ее помощью воссоздать объемное изображение. Такие изображения называются голограммами и их можно встретить практически везде. В отличие от обычной фотографии, если смотреть на голограмму под разными углами, изображение будет изменяться, как если бы мы осматривали предмет с разных сторон.

В части А задачи мы исследуем фазовые соотношения при формировании изображения линзой. В частях В и С рассмотрим, как работают простейшие модели голограмм.



Часть А. Дифракция (4 балла)

Пусть в пространстве распространяется монохроматическая электромагнитная волна с волновым числом k . Будем задавать волну в комплексном виде

$$E = f(\vec{r})e^{-i\omega t}.$$

Здесь величина f – комплексная функция координат, которая задает распределение амплитуды и фазы в волне. Будем называть ее комплексной амплитудой волны.

Физическое значение электрического поля равно вещественной части этого выражения.

В дальнейшем не будем писать зависимость поля в волне от времени.

Нас будет интересовать распределение комплексной амплитуды $f(r)$ в пространстве.

Поляризацию электромагнитных волн нигде дальше учитывать не будет.

Основное направление распространения волн, от которого отсчитываем все углы – ось z .

Интенсивность электромагнитной волны в данной точке пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды. Поскольку нас будут интересовать только относительные величины интенсивностей, будем в дальнейшем называть величину

$$I = |f(r)|^2.$$

Оказывается, что если задать комплексную амплитуду монохроматической волны известной частоты на некоторой поверхности (например в плоскости $z = 0$), то по ней можно будет восстановить комплексную амплитуду волны во всем пространстве.

Во всей этой части мы работаем с монохроматическим излучением и считаем известным волновое число k .

A1^{0.20}

Пусть плоская волна амплитуды E_0 распространяется в плоскости xz под углом θ к оси z .

Запишите выражение для комплексной амплитуды $f(\vec{r})$.

A2^{0.50}

Пусть в плоскости $z = 0$ комплексная амплитуда имеет вид $f = E_0 e^{iux}$. Найдите выражение для комплексной амплитуды в плоскости с произвольной координатой z .

В ответ должно входить волновое число волны k волны.

Получите приближенное выражение в случае $u \ll k$.

Ищите решение в виде плоской волны, распространяющейся под острым углом к оси z .

A3^{0.70}

Пусть в плоскости $z = 0$ находится дифракционная решетка, коэффициент пропускания которой (по амплитуде) имеет вид:

$\tau(x) = \alpha + \beta \cos ux.$

Перпендикулярно решетке на нее падает плоская электромагнитная волна с волновым числом k и амплитудой E_0 .
Найдите выражение для комплексной амплитуды волны в плоскости с $z > 0$.
Используйте результат предыдущего пункта и принцип суперпозиции.

A4^{0.60} За дифракционной решеткой из предыдущего пункта поставили линзу с фокусным расстоянием F . Какое изображение будет в фокальной плоскости такой линзы? Укажите его характерные размеры.

A5^{0.50} Оказывается, что на некотором расстоянии от периодической структуры распределение интенсивности точно такое же, как на ней самой. (Это явление называется саморепродукцией.)
При каких значениях координаты z это происходит?

Пусть теперь дифракционная решетка изготовлена из прозрачного вещества толщины h , показатель преломления которого меняется по закону

$$n = n_0 + n_1 \cos ux.$$

Но поскольку такая структура прозрачна, мы не сможем ее увидеть.
Чтобы преодолеть эту сложность, поместим ее на расстоянии $2F$ от линзы с фокусным расстоянием F .
Перпендикулярно решетке на нее падает плоская электромагнитная волна с волновым числом k и амплитудой E_0 .
Тогда распределение комплексной амплитуды в изображении будет таким же, как и в плоскости самой решетки, с точностью до замены $x \rightarrow -x$. Поэтому мы все еще ничего не увидим.

Решетка располагается в плоскости $z = 0$, линза – в плоскости $z = 2F$.

A6^{0.50} Считая, что $khn_1 \ll 1$, запишите выражение для комплексной амплитуды волны между линзой и дифракционной решеткой.
Как будет выглядеть изображение в фокальной плоскости линзы ($z = 3F$)?

A7^{0.50} Разместим на оптической оси в фокальной плоскости линзы ($z = 3F$) небольшую пластинку (размером меньше, чем размер изображения в фокальной плоскости, так что изменяется только его центральная часть), которая вносит дополнительное запаздывание по фазе $\pi/2$. Как теперь выглядит изображение на расстоянии $2F$ от линзы (в плоскости $z = 4F$)? Запишите зависимость интенсивности от x .

A8^{0.50} Теперь вместо прозрачной пластинки, вносящей сдвиг фаз, поставили непрозрачный экран такого же размера. Запишите зависимость интенсивности от x в этом случае.

Часть В. Голограмма (4.5 баллов)

Для того, чтобы записать волну, мало информации про интенсивность. Нужно еще записать фазу волны. Это можно сделать следующим способом. Нужно осветить предмет лазером. Потом направить рассеянный объектом свет направить на экран, заставив на нем же интерферировать со светом непосредственно от лазера (опорная волна). То есть мы фотографируем интерференционную картину света от предмета и опорной волны, а потом используем эту фотографию для восстановления света, идущего от объекта.

Во всей этой части можно считать, что углы распространения волн с осью z много меньше 1.

B1^{0.20} Пусть от предмета идет одна плоская волна амплитуды E_1 под углом α к оси z , опорная волна амплитуды E_0 падает под углом $-\theta$ к оси z (знак $-$ означает, что угол отсчитывается в противоположную сторону, при этом $\theta > 0$). Фотографическая пластинка расположена в плоскости $z = 0$. Найдите распределение интенсивности $I(x)$ на пластинке.

Коэффициент пропускания пластинки после обработки связан с интенсивностью падающего света соотношением $\tau = 1 - \gamma I$. Считайте, что значение интенсивности таковы, что всегда $\tau > 0$. Таким образом, пластинка превращается в дифракционную решетку, которая и является голограммой.

B2^{0.50} Пусть на полученную таким способом голограмму падает только опорная волна (под тем же углом, что и в предыдущем пункте). В результате дифракции за пластинкой будет несколько плоских волн. Найдите, под какими углами к оси z они будут распространяться.

Оказывается, одна из восстановленных волн совпадает с падающей волной, которая шла от предмета при записи голограммы. Ее естественно считать восстановленным изображением. Однако обычно объект излучает более одной плоской волны.

B3^{0.80} Пусть теперь от объекта идут две плоских волны амплитуд E_1 и E_2 под близкими друг к другу углами α_1 и α_2 соответственно.
Опорная волна идет по-прежнему под углом θ к нормали, ее амплитуда E_0 .
Найдите распределение интенсивности в плоскости $z = 0$.

B4^{1.20} Пусть теперь голограмма освещается только опорной волной. Сколько волн будет распространяться за голограммой, под какими углами и с какими амплитудами?
Считайте, что $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \ll \alpha \ll 1$ и $\theta \ll 1$.

B5^{0.50} Часть волн из предыдущего пункта можно сгруппировать в изображения объекта. Сколько у объекта будет изображений и где они будут расположены?

B6^{0.30} Пусть голограмма имеет конечную ширину D . Какое минимальное угловое расстояние $\Delta\alpha$ между лучами можно будет различить в формируемом ей изображении?

B7^{1.00} Мы пока рассматривали только монохроматическое излучение. Пусть теперь на голограмму из пункта B4 падает восстанавливающая волна с конечной шириной спектра $\Delta\lambda$. Из-за этого угловая ширина изображения увеличится. Оцените, при какой максимальной ширине спектра $\Delta\lambda$ можно будет восстановить объект с угловым размером $\Delta\alpha$. Выразите ответ через длину волны λ и углы α и θ .

Часть С. Объемная голограмма (1.5 балла)

Рассмотренные выше голограммы неудобны для практического использования, поскольку для формирования изображения необходимо когерентное освещение (лазер). Для того, чтобы обойти эту сложность можно использовать объемные голограммы.

C1^{0.80} На пластинку падает волна от источника под углом α , опорная волна падает на пластинку по нормали. Тогда в объеме пластинки возникнут объемные интерференционные полосы. Найдите расстояние d между плоскостями, в которых интенсивность максимальна, а также угол β между этими плоскостями и осью z .

C2^{0.70}

Падающее на голограмму излучение отражается от плоскостей максимальной интенсивности зеркально. Пусть пластина освещается белым светом, падающим на нее по нормали. При каком условии на длину волны интенсивность отраженного света будет максимальной? Под каким углом α' направлена отраженная волна?

Таким образом, для того, чтобы толстая голограмма образовывала изображение, не нужно использовать монохроматический свет лазера, достаточно обычного освещения! Такая голограмма уже достаточно похожа на те, что можно встретить, например, на магнитах.

Т

Оптика

Волновая оптика

Интерференция

Сборы XY

Y

2022



Website in English