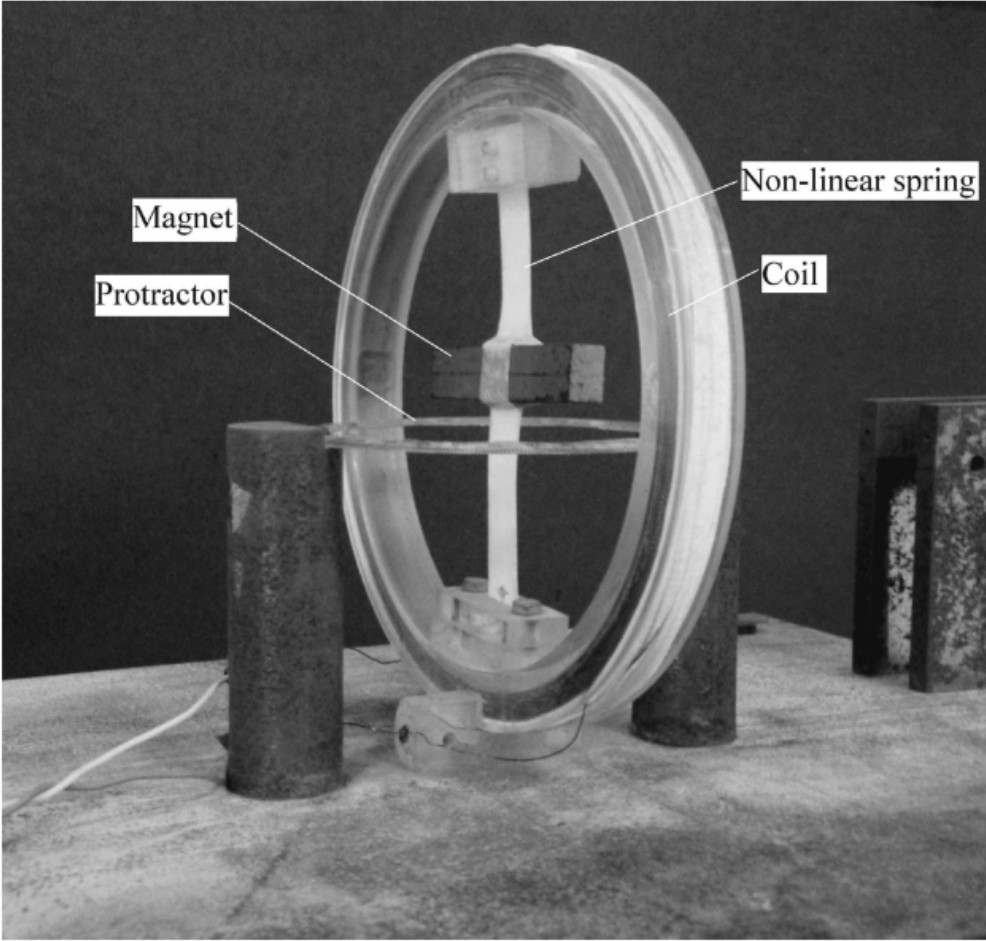




В этой задаче погрешности оценивать не требуется!} Этой задаче отвечает программа PE2.

Задачи про колебания легко решать аналитически, если они описываются линейными уравнениями. Найти нелинейные поправки уже намного сложнее. В этой задаче мы исследуем их численно.

Для экспериментального наблюдения нелинейных колебаний можно использовать следующую установку. В центре упругого жгута закреплен магнитный брусок, момент инерции которого $I = 5 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. При отклонении бруска от равновесия на угол x (в радианах), на него действует возвращающий момент сил $M(x) = k_1 x + k_3 x^3$, где $k_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$, $k_3 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$. Для возбуждения колебаний на брусок можно воздействовать магнитным полем, которое создается катушками с током (см. рисунок).



В этой задаче мы будем исследовать колебания, численно решая соответствующие дифференциальные уравнения. Для этого вам предоставлена программа. В ней можно задать параметры уравнения и начальные условия. При нажатии на кнопку "Построить численное решение" она выведет график решения – зависимость координаты от времени для соответствующей части задачи. Отдельные участки этого графика можно увеличивать (для этого нажмите на кнопку под графиком с изображением лупы и всплывающей надписью Zoom to Rectangle, а затем выделить нужный участок графика), чтобы считать значения с нужной точностью. Вернуться к предыдущему виду графика, нажмите на стрелку (<-), а если это не сработает – постройте численное решение заново.

Численные данные можно вводить в программу с помощью окон справа. Общий для всех частей блок позволяет задать начальное значение координаты (x_0) и ее производной по времени (скорости v_0).

Кроме этого, вы можете задать полное время T (в секундах), на котором определено решение (тогда решение будет найдено на интервале времени $0 < t < T$) и шаг по времени (тоже в секундах), используемый при нахождении решения. Почти всегда рекомендуется использовать шаг времени по умолчанию (0.001 с). Если вам потребуется увеличить точность решения, можете уменьшить шаг. Однако время нахождения решения при этом увеличится.

В каждой из частей задачи вы можете задать параметры соответствующего уравнения. Смысл этих параметров объясняется в соответствующих частях. Названия переменных приведены рядом с соответствующими полями (Omega – Ω , omega – ω , Epsilon – ϵ , w0 – ω_0 , Gamma – γ , mu – μ).

При решении всех пунктов задачи указывайте используемые значения параметров и начальных условий!}

Часть А. Свободные колебания (4 балла)

A1 0.20 Запишите уравнение колебаний бруска без учета трения и внешних сил в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0.$$

Укажите численные значения частоты свободных гармонических колебаний малой амплитуды ω_0 и параметра нелинейности ϵ .

Далее в этой части мы будем исследовать записанное выше уравнение с найденными вами параметрами!}

A2 1.00 Снимите зависимость периода от амплитуды колебаний $T(A)$. Опишите методику (какие начальные условия и времена использовали, по каким формулам определяли период). Исследуйте диапазон амплитуд, при которых период меняется не более чем на 10%. Проведите не менее 15 измерений при различных значениях амплитуды.

A3 0.80 При достаточно малых амплитудах зависимость периода от амплитуды имеет вид

$$T = T_0(1 + \alpha A^n).$$

Здесь T_0 – период колебаний малой амплитуды. Определите из ваших данных параметры α , n .

A4 1.50 При достаточно малой амплитуде колебаний зависимость угла от времени имеет вид

$$x = a \cos \omega t + b \cos 3\omega t.$$

Исследуйте зависимость амплитуды гармоники утроенной частоты b от амплитуды колебаний A . Исследуйте ту же область амплитуд $A < 0.5$ и определите как можно точнее значение b для 5 различных амплитуд.

\textit{Примечание:} Исследуемый эффект достаточно мал. Убедитесь, что вы проводите вычисления и измерения с достаточной точностью, чтобы его качественно наблюдать. При необходимости вы можете уменьшить шаг по времени для численного решения.

A5 0.50 Известно, что при малых амплитудах $b = \beta A^3$. Определите по вашим данным коэффициент β .

Часть В. Вынужденные колебания (3.5 балла)

Пусть теперь на магнитный брусок действует внешний момент сил, амплитуда которых задается параметром f , частота Ω . Тогда уравнение движения будет иметь вид.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = f \cos \Omega t$$

Здесь мы учитываем еще и вязкое трение, величина которого задается постоянной γ .

В этой части вам неизвестны значения параметров ω_0 , γ и ε , но вы можете регулировать амплитуду f и частоту приложенного внешнего момента, а также начальные условия.

B1 1.00 Как можно точнее определите значения ω_0 , ε , γ .

Предположим, что результирующее установившееся колебание можно с разумной точностью описать функцией

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi).$$

Тогда величину φ будем называть сдвигом фаз колебаний (по отношению к внешнему воздействию). Не ограничивая общности можно считать, что $-\pi < \varphi \leq \pi$.

B2 1.50 Выберем значение $f = 25 \text{ с}^{-2}$. Постройте графики зависимости амплитуды колебаний и сдвига фаз от частоты. Для сравнения на тех же графиках постройте аналогичные теоретические зависимости без учета нелинейности.

Когда амплитуда внешнего момента сил f достаточно велика, становятся существенными нелинейные слагаемые. Из-за этого в области вблизи резонанса одному набору параметров f , Ω может отвечать несколько значений амплитуды колебаний. То установившееся колебание, которое фактически установится, зависит от начальных условий. Это аналогично явлению гистерезиса в магнетизме.

B3 1.00 Выберите значение $f = 80 \text{ с}^{-2}$. Постройте график зависимости амплитуды результирующих колебаний от частоты. Укажите область частот, в которой наблюдается гистерезис (то есть два значения амплитуды при одной и той же частоте).

Часть С. Параметрические колебания (4.5 балла)

Рассмотрим колебания, для которых частота немного меняется со временем (то есть $\mu \ll 1$), они описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \mu \cos \Omega t)x = 0.$$

При определенных значениях μ и Ω амплитуда колебаний будет экспоненциально расти, при каких-то оставаться ограниченной.

Используйте в этой части численное значение $\omega_0 = 20 \text{ с}^{-1}$. До пункта C5 считайте, что трения и нелинейности нет ($\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$ в параметрах уравнения в программе).

C1 1.00 Наиболее быстрый рост амплитуды колебаний наблюдается при частоте $\Omega \approx 2\omega_0$.

Определим отклонение от резонансной частоты $\delta = \Omega - 2\omega_0$.

Амплитуда колебаний будет возрастать, если δ не слишком велико.

На плоскости δ , μ изобразите область, где амплитуда колебаний растет.

Рассматривайте область $\mu \ll 1$, $\delta \ll \omega_0$.

C2 0.50 Определите уравнение для границы области $\delta(\mu)$. Запишите уравнение и найдите его параметры.

C3 1.50 В области параметрического резонанса зависимость амплитуды от времени имеет вид $A \sim e^{st}$. Определите зависимость параметра s от относительного изменения частоты μ и отстройки по частоте δ . Используя численные данные, найдите форму зависимости $s(\mu, \delta)$ и определите ее параметры.

Подсказка: может быть полезным изучить зависимость $s(\mu)$ при постоянной частоте δ для нескольких значений δ . При этом зависимость s^2 от μ^2 имеет очень простой вид.

C4 1.00 Амплитуда колебаний растет также и вблизи области $\Omega \approx \omega_0$, при достаточно малых $\delta = \Omega - \omega_0$. Найдите границы области, при которой возможен рост амплитуды $\delta(\mu)$. Изобразите эту область на плоскости δ , μ . Определите уравнение этой границы. (Подсказка: зависимость $\delta(\mu)$ имеет степенной вид.)

В области резонанса в линейном приближении амплитуда колебаний растет неограниченно. Поэтому амплитуда установившихся колебаний определяется нелинейными слагаемым, и нам нужно рассмотреть полное уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \mu \cos \Omega t)x + \varepsilon x^3 = 0.$$

C5 0.50 Пусть $\gamma = 0.2 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 450 \text{ с}^{-2}$. Нарисуйте на плоскости μ , $\delta = \Omega - 2\omega_0$ область, в которой амплитуда колебаний растет. Для $\delta = 0$ и $\mu = 0.05$ найдите амплитуду установившихся колебаний, а также время оцените время, за которое они устанавливаются.

Часть D. Маятник с вязким трением (1 балл)

Математический маятник представляет собой груз, закрепленный на невесомом стрержне. Стержень может свободно вращаться вокруг некоторой оси. К маятнику приложен некоторый постоянный момент силы. Тогда угол отклонения маятника от равновесия x удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = f.$$

Здесь $\omega_0 = 20\text{с}^{-1}$ – частота малых колебаний, а величина f пропорциональна моменту внешних сил.
При достаточно больших значениях γ возможен режим движения, при котором маятник вращается с постоянной средней угловой скоростью.

D1^{1.00} В случае $\gamma = \omega_0/2$ найдите минимальное значение f_0 , при котором возможно такое движение. (Начальный угол отклонения и начальную угловую скорость маятника считайте равными нулю.)
При $f - f_0 \ll f_0$ зависимость средней угловой скорости от приложенного момента имеет вид $\langle \omega \rangle \sim (f - f_0)^\alpha$. Найдите значение постоянной α .

РЕ Механика Колебания Сборы ХУ Y 2022 Параметрические колебания Уравнение колебаний Затухание

Вынужденные колебания

 Website in English