

A1 1.00

Запишите дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал электрического поля φ .

Подсказка: согласно распределению Больцмана, концентрация n частиц с энергией E пропорциональна $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, где T – абсолютная температура среды.

Рассмотрим участок раствора снаружи мембраны, имеющий единичную площадь и заключённый между координатами x и $x + dx$. Для него по теореме Гаусса

$$E(x + dx) - E(x) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} en(x)dx.$$

Поскольку

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx},$$

получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0} n(x).$$

Потенциальная энергия положительного иона в этом поле равна $e\varphi(x)$, поэтому для концентрации ионов из распределения Больцмана получим

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}.$$

Наконец,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{en_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right).$$

Ответ:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{en_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right)$$

A2 0.30

Запишите граничные условия, которым удовлетворяет потенциал φ на поверхности мембраны, т.е найдите $\varphi(0)$, $\frac{d\varphi}{dx}(0)$.

По условию $\varphi(0) = 0$. Поскольку клеточная мембрана представляет собой равномерно заряженную сферу, поле снаружи у её поверхности равно

$$E(0) = \frac{-\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = -E(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Ответ:

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

A3 0.80

Определите n_0 , A_1 и B_1 . Выразите $\varphi(x)$ и $n(x)$ (концентрацию положительных ионов в точке x) через σ , ε , ε_0 , T , e и k .

Подставим функцию $\varphi(x) = A_1 \ln(1 + B_1 x)$ в уравнение, полученное в **A1**:

$$-\frac{A_1 B_1^2}{(1 + B_1 x)^2} = -\frac{en_0}{\varepsilon\varepsilon_0} (1 + B_1 x)^{-\frac{eA_1}{kT}}$$

Отсюда получаем

$$A_1 = \frac{2kT}{e}, \quad B_1 = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}}.$$

Подставив $\varphi(x) = A_1 \ln(1 + B_1 x)$ с найденными A_1 и B_1 в уравнение $\frac{d\varphi}{dx}(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, полученное в пункте **A2**, имеем

$$A_1 B_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

откуда непосредственно получается

$$B_1 = \frac{\sigma e}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}, \quad n_0 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}.$$

Тогда выражение для потенциала принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{2kT}{e} \ln \left(1 + \frac{\sigma e x}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \right).$$

Из уравнения

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}$$

получим, наконец,

$$n(x) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma e x}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \right)^2}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2kT}{e}, \quad B_1 = \frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT}, \quad n_0 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT}, \\ \varphi(x) &= \frac{2kT}{e} \ln \left(1 + \frac{\sigma e x}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \right), \\ n(x) &= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma e x}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \right)^2} \end{aligned}$$

A4 0.40

Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

Ответ: Действительно, заряд положительных ионов, приходящийся на единицу площади мембраны, равен:

$$e \int_0^{+\infty} n(x) \, dx = \frac{\sigma^2 e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma e x}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} \right)^2} \, dx = \sigma \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^2} \, dy = \sigma$$

A5 1.50

В расчете на единицу площади мембраны найдите энергию электрического поля U_f и сумму потенциальных энергий положительных ионов U_e в этом поле.

Плотность энергии электрического поля

$$u_f = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2.$$

Из полученных в предыдущих пунктах формул имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2kT}{e} \frac{\frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT}}{1 + \frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} x}.$$

Отсюда находим энергию поля:

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{\sigma kT}{e} \int_0^\infty \frac{\frac{\frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT}}{\left[1 + \frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} x \right]^2} dx} = \\ &= \frac{\sigma kT}{e} \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{\sigma kT}{e}. \end{aligned}$$

Сумма потенциальных энергий положительных ионов в этом поле равна

$$\begin{aligned} U_e &= \int_0^\infty e n(x) \varphi(x) dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} 2kT \int_0^\infty \frac{\ln \left(1 + \frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} x \right)}{\left(1 + \frac{\sigma e}{2\varepsilon \varepsilon_0 kT} x \right)^2} dx = \\ &= \frac{2\sigma kT}{e} \int_0^\infty \frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2} dy = -\frac{2\sigma kT}{e} \int_0^\infty \ln(1+y) d\frac{1}{1+y} = \\ &= \frac{2\sigma kT}{e} \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{2\sigma kT}{e}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$U_f = \frac{\sigma kT}{e}, \quad U_e = \frac{2\sigma kT}{e}$$

B1 0.80

Определите A_2 и B_2 . Выразите ответ через T , ε , ε_0 , e , k и n_0 .

Аналогично **A1**, потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{en_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) \quad \left[-D < x < D, \varphi(0) = 0\right].$$

Подставляя в него функцию $\varphi(x) = A_2 \ln[\cos(B_2x)]$, имеем

$$\frac{A_2 B_2^2}{\cos^2(Bx)} = \frac{en_0}{\varepsilon\varepsilon_0} [\cos(Bx)]^{-\frac{eA}{kT}}.$$

Отсюда сразу же получаем

$$A_2 = \frac{2kT}{e}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}}.$$

Ответ:

$$A_2 = \frac{2kT}{e}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}}$$

B2 0.50

Введём величину $\theta = B_2 D$.

Из граничных условий на поверхности мембраны получите уравнение, связывающее θ и $e, \sigma, D, \varepsilon, \varepsilon_0, k$ и T .

Аналогично **A2**, граничное условие имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx}(-D) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Для функции $\varphi(x) = A_2 \ln[\cos(B_2x)]$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = -A_2 B_2 \operatorname{tg}(B_2x),$$

откуда

$$A_2 B_2 \operatorname{tg}(B_2 D) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Подставив выражение для A_2 из **B1**, получим

$$B_2 D \operatorname{tg}(B_2 D) = \frac{\sigma e D}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT},$$

что можно переписать через $\theta \equiv B_2 D$ в виде

$$\theta \operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma e D}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT} \quad \left[0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right].$$

Ответ:

$$\theta \operatorname{tg} \theta = \frac{e\sigma D}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT} \quad \left[0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$$

B3 0.40

Выразите n_0 через $D, \sigma, \varepsilon, \varepsilon_0, T, e, k$ и θ .

Поскольку $B_2 = \frac{\theta}{D}$, то

$$n_0 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2} B_2^2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT \theta^2}{e^2 D^2}.$$

Ответ:

$$n_0 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT \theta^2}{e^2 D^2}$$

B4 0.50

Найдите разность $\Delta n \equiv n(\pm D) - n_0$ между концентрациями положительных ионов у поверхности двух мембран и посередине между ними.

Выразите ответ через σ, ε, T и k .

Из распределения Больцмана при подстановке функции $\varphi(x) = A_2 \ln[\cos(B_2x)]$ получим выражение для концентрации в следующем виде:

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}} = n_0 [\cos(B_2 x)]^{-\frac{eA_2}{kT}} = n_0 \frac{1}{\cos^2 B_2 x},$$

откуда

$$n(\pm D) = n_0 \frac{1}{\cos^2(B_2 D)} = n_0 \left(1 + \operatorname{tg}^2 B_2 D\right) = n_0 + n_0 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Заметим, что

$$n_0 \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}{D^2 e^2} \left(\theta \operatorname{tg} \theta\right)^2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}{D^2 e^2} \left(\frac{\sigma e D}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}.$$

Таким образом,

$$\Delta n = n(\pm D) - n_0 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}.$$

Ответ:

$$\Delta n = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}$$

B5 0.50

Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

Ответ: Аналогично **A4**, заряд положительных ионов, приходящийся на единицу площади системы, равен:

$$\int_{-D}^D en(x) \, \mathrm{d}x = en_0 \int_{-D}^D \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(B_2 x)} = \frac{2e}{B_2} \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT \theta^2}{e^2 D^2} \tan \theta = \frac{2e}{B_2} \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT \theta}{e^2 D^2} \frac{\sigma e D}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT} = 2\sigma$$

B6 1.50

Найдите полную силу f , действующую на единицу площади мембраны. Гидростатическим давлением можно пренебречь. Ответ выразите через e , D , θ , ε , ε_0 , k и T

Подсказка: положительные ионы в воде ведут себя как идеальный газ и локально находятся в тепловом равновесии.

На каждую из мембран действуют заряды положительных ионов и другой мембраны. Поскольку система в целом электронейтральна, суммарный заряд ионов и одной из мембран равен заряду мембраны, взятому с противоположным знаком. Таким образом, система в некотором смысле эквивалентна плоскому конденсатору, для которого, как известно,

$$f_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

причём f_e направлена от одной мембраны к другой. Давление, создаваемое положительными ионами как идеальным газом, равно

$$f_h = n(\pm D)kT = \left(n_0 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}\right)kT = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 k^2 T^2 \theta^2}{e^2 D^2} + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Результирующая сила будет расталкивать мембраны и равна

$$f = f_h - f_e = n_0 kT = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 k^2 T^2 \theta^2}{e^2 D^2}.$$

Второй способ

Плоскость $x = 0$ делит систему на две части. В силу симметрии и электронейтральности системы как целого, каждая из этих частей также будет электронейтральна, а потому эти части не будут взаимодействовать друг с другом электростатически. Таким образом, взаимодействие частей сводится только к давлению идеального газа положительных ионов, равного

$$f_{h0} = n_0 kT.$$

Поскольку каждая из частей находится в равновесии, то

$$f = f_{h0} = n_0 kT = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 k^2 T^2 \theta^2}{e^2 D^2}.$$

Ответ:

$$f = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 k^2 T^2 \theta^2}{e^2 D^2}$$

B7^{1.80} Для сравнительно малых расстояний D зависимость $f(D)$ имеет вид: $f = k_1 D^\alpha$, а для больших: $f = k_2 D^\beta$. Найдите α и β .

Как было получено в **B6**,

$$f \propto \left(\frac{\theta}{D}\right)^2,$$

где θ , согласно **B2**, удовлетворяет уравнению

$$\theta \operatorname{tg} \theta = \frac{e \sigma D}{2 \varepsilon \varepsilon_0 k T},$$

т.е. θ также зависит от D .

Рассмотрим случай $\frac{e \sigma D}{2 \varepsilon \varepsilon_0 k T} \ll 1$. Для него $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, поэтому

$$\theta \approx \sqrt{\frac{e \sigma D}{2 \varepsilon \varepsilon_0 k T}} \propto \sqrt{D},$$

потому

$$f \propto \left(\frac{\sqrt{D}}{D}\right)^2 = \frac{1}{D},$$

т.е. $\alpha = -1$.

Рассмотрим теперь случай $\frac{e \sigma D}{2 \varepsilon \varepsilon_0 k T} \gg 1$. Для него $\theta \approx \frac{\pi}{2} = \text{const}$, поэтому

$$f \propto \frac{1}{D^2},$$

т.е. $\beta = -2$.

Ответ:

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2$$