

A1 ^{1.00} Найдите температуру воздуха $T_{\text{в}}$ на высоте h над поверхностью Земли. Ответ выразите через T_0 , g , $\mu_{\text{в}}$, R и показатель адиабаты $\gamma_{\text{в}}$.

Рассмотрим перемещение порции воздуха на высоту h :

$$P_1dV_1 - P_2dV_2 = \frac{C_Vdm}{\mu_{\text{в}}}(T - T_0) + dmgh$$

откуда:

Ответ:

$$T = T_0 - \frac{\mu_{\text{в}}gh}{C_P} = T_0 - \frac{(\gamma_{\text{в}} - 1)\mu_{\text{в}}gh}{\gamma_{\text{в}}R}$$

A2 ^{1.00} Найдите зависимость давления водяных паров от температуры $p_{\text{п}}(T)$.

Ответ выразите через φ_0 , $p_{\text{п}0}$, T_0 , $\mu_{\text{п}}$, $\mu_{\text{в}}$, $\gamma_{\text{в}}$ и T .

Из условия равновесия пара получим:

$$dP_{\text{п}} = -\rho_{\text{п}}gdh$$

откуда:

$$\frac{dP_{\text{п}}}{P_{\text{п}}} = \frac{\mu_{\text{п}}\gamma_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}(\gamma_{\text{в}} - 1)} \frac{dT}{T}$$

Интегрируя, находим:

Ответ:

$$P_{\text{п}} = \varphi_0 P_{\text{п}0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\mu_{\text{п}}\gamma_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}(\gamma_{\text{в}} - 1)}}$$

A3 ^{0.50} Используя график зависимости $p_{\text{н.п}}(T)$, найдите для $\varphi_0 = 65\%$ и $T_0 = 287$ К высоту h над поверхностью Земли, на которой пар становится насыщенным.

Решая уравнений графически, находим:

$$T_{\text{нас}} \approx 6,6^{\circ}\text{C}$$

Тогда:

Ответ:

$$h = \frac{\gamma_{\text{в}}R(T_0 - T_{\text{нас}})}{(\gamma_{\text{в}} - 1)\mu_{\text{в}}g} \approx 757 \text{ м}$$

B1 ^{1.00} Удельная теплота парообразования зависит от температуры T следующим образом:

$$\lambda(T) = \lambda_n + k(T - T_n)$$

Найдите k . Ответ выразите через c , R , $\mu_{\text{п}}$ и показатель адиабаты $\gamma_{\text{п}}$.

Примечание: если вы не можете решить этот пункт, то в дальнейшем считайте, что $\lambda = \lambda_n = \text{const}$. К потере баллов это не приводит.

Количество теплоты, требуемое для испарения массы m равняется:

$$Q = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} + A$$

Поскольку плотностью воды можно пренебречь:

$$A = pV = \frac{mRT}{\mu}$$

Поскольку жидкость слабо сжимаема, количество теплоты, необходимое для её нагревания в любом процессе, с хорошей точностью пропорционально изменению её внутренней энергии:

$$U_{\text{ж}}(T_2) - U_{\text{ж}}(T_1) = cm(T_2 - T_1)$$

тогда

$$U_{\text{ж}}(T) = cmT + mC$$

где C - некоторая постоянная величина
Тогда:

$$Q = mC + m \left(\frac{\gamma_{\text{п}} R}{\mu_{\text{п}}(\gamma_{\text{п}} - 1)} - c \right) T = \lambda(T)m$$

Определяя C из начальных условий, находим:

$$\lambda(T) = \lambda_n + \left(c - \frac{\gamma_{\text{п}} R}{(\gamma_{\text{п}} - 1)\mu_{\text{п}}} \right) (T_n - T)$$

Получим ответ:

Ответ:

$$k = \frac{\gamma_{\text{п}} R}{(\gamma_{\text{п}} - 1)\mu_{\text{п}}} - c$$

B2^{0.50} Покажите, что при перемещении выделенной воздушной массы количество теплоты, полученное системой, заключённой в её объёме, можно представить так:

$$\delta Q = m_{\text{в}} \left(\frac{\gamma_{\text{в}} R}{\mu_{\text{в}}(\gamma_{\text{в}} - 1)} dT + g dz + \lambda d\alpha \right)$$

Для подведённого к системе количества теплоты имеем:

$$\delta Q = \frac{C_V m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + P_{\text{в}} dV_{\text{в}} + \lambda(T) dm_{\text{п}}$$

или же

$$\delta Q = \frac{C_P m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} dT - V_{\text{в}} dP_{\text{в}} + \lambda(T) dm_{\text{п}}$$

Из условия равновесия воздуха:

$$dP_{\text{в}} = -\rho_{\text{в}} g dh$$

откуда:

$$\delta Q = m_{\text{в}} \left(\frac{\gamma_{\text{в}} R}{\mu_{\text{в}}(\gamma_{\text{в}} - 1)} dT + g dz + \lambda(T) d\alpha \right)$$

B3^{0.50} Найдите $\frac{d\alpha}{dz}$. Ответ выразите через $\mu_{\text{п}}, \mu_{\text{в}}, P_{\text{в}}, P_{\text{н.п}}, \frac{dP_{\text{н.п}}}{dT}, \frac{dT}{dz}$ и $\frac{dP_{\text{в}}}{dz}$

Для α с учётом уравнения состояния имеем:

$$\alpha = \frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{в}}} = \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{в}}} \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{в}}}$$

Дифференцируя:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{в}}} \left(\frac{1}{P_{\text{в}}} \frac{dP_{\text{п}}}{dz} - \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{в}}^2} \frac{dP_{\text{в}}}{dz} \right)$$

Рассмотрим производную давления пара по высоте как производную сложной функции:

$$\frac{dP_{\Pi}}{dz} = \frac{dP_{\Pi}}{dT} \frac{dT}{dz}$$

откуда:

Ответ:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\text{В}}} \left(\frac{1}{P_{\text{В}}} \frac{dP_{\Pi}}{dT} \frac{dT}{dz} - \frac{P_{\Pi}}{P_{\text{В}}^2} \frac{dP_{\text{В}}}{dz} \right)$$

В4^{1.00} Найдите температурный градиент $\frac{dT}{dz}$. Ответ выразите через $\alpha, g, R, \gamma_{\text{В}}, T, \mu_{\text{В}}, \mu_{\Pi}$ и $\lambda(T)$.

Приравнивая δQ к нулю, находим:

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g - \lambda \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\text{В}}} \frac{P_{\Pi}}{P_{\text{В}}^2} \frac{dP_{\text{В}}}{dz}}{\frac{\gamma_{\text{В}} R}{\mu_{\text{В}}(\gamma_{\text{В}} - 1)} + \lambda \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\text{В}}} \frac{1}{P_{\text{В}}} \frac{dP_{\Pi}}{dT}}$$

Величину $\frac{dP_{\Pi}}{dT}$ найдём из уравнения Клапейрона - Клаузиуса:

$$\frac{dP_{\Pi}}{dT} = \frac{\mu_{\Pi} \lambda(T) P_{\Pi}}{RT^2}$$

После подстановки которой получим:

Ответ:

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{(\gamma_{\text{В}} - 1) \mu_{\text{В}} g}{\gamma_{\text{В}} R} \frac{\left(1 + \frac{\lambda(T) \mu_{\text{В}} \alpha}{RT} \right)}{\left(1 + \frac{\lambda(T) \mu_{\Pi} \alpha}{RT} \frac{(\gamma_{\text{В}} - 1) \lambda(T) \mu_{\text{В}}}{\gamma_{\text{В}} RT} \right)}$$

В5^{1.80} Найдите температуру T_0 на поверхности Земли.

Рассмотрим точку излома на графике. В этой точке $\alpha = \alpha_1$.
 Причиной излома является начало процесса конденсирования, в связи с чем для градиента температур слева от точки излома применима формула из части *A1*, а справа – формула из части *B4*. Тогда значение α_1 можно найти из отношения угловых коэффициентов в точке излома:

$$k = - \left(\frac{dT}{dz} \right)_{T \rightarrow T_1 - 0} \frac{\gamma_{\text{В}} R}{(\gamma_{\text{В}} - 1) \mu_{\text{В}} g}$$

откуда:

$$\alpha_1 = \frac{1 - k}{\frac{\lambda(T_1) \mu_{\Pi}}{RT_1} \left(k \frac{(\gamma_{\text{В}} - 1) \mu_{\text{В}} g}{\gamma_{\text{В}} R} \frac{\lambda(T_1)}{g T_1} - \frac{\mu_{\text{В}}}{\mu_{\Pi}} \right)} \approx 1,01 \cdot 10^{-2}$$

Далее:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_{\Pi} p_{\text{н.п}}(T_1)}{\mu_{\text{В}} p_{\text{В}}}$$

Из уравнения адиабаты для сухого воздуха имеем:

$$p_{\text{В}} = p_0 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{\gamma_{\text{В}}}{\gamma_{\text{В}} - 1}}$$

Тогда получим:

Ответ:

$$T_0 = T_1 \left(\frac{\alpha_1 \mu_{\text{в}} p_0}{\mu_{\text{п}} p_{\text{н.п}}(T_1)} \right)^{\frac{\gamma_{\text{в}} - 1}{\gamma_{\text{в}}}} \approx 309,2 \text{ К}$$

В6^{0.70}

Оцените, на какой высоте h_2 начинает выпадать снег.

Из углового коэффициента первого участка графика находим высоту h_1 , соответствующую излому на графике:

$$h_1 = \frac{\gamma_{\text{в}} R (T_0 - T_1)}{(\gamma_{\text{в}} - 1) \mu_{\text{в}} g} \approx 2680 \text{ м}$$

Проведя прямую, соответствующую температуре $T_{\text{пл}} = 273 \text{ К}$, находим:

Ответ:

$$h_2 \approx 4,69 \text{ км}$$