

A1^{1.50} По графику расчески колебаний метронома найдите с точностью 10%: угловую частоту ω , установившуюся амплитуду A , коэффициент затухания γ и угловую скорость ω_D сообщаемую спусковым механизмом при ударе. Известно, что $\frac{\omega_D}{\omega}$, $\gamma \ll 1$.

Из графика видно, что к 12 с изменения амплитуды прекращается. Установившаяся амплитуда равна $A = 0.3$ рад. Сразу заметим, что при таких углах погрешность приближения $\sin x \approx x$ не превышает 1.5%. В частности, для целей этого пункта можно считать, что частота не зависит от амплитуды. Частоту можно найти методом рядов, например

$$\omega = 2\pi \frac{16}{14.5c - 9.5c} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Колебания в остутствии подкачки энергии описываются уравнением

$$ml^2\ddot{\theta} = -2ml^2\gamma\dot{\theta} - mgl \sin \theta$$

(закон изменения момента импульса для маятника).

Заменяя в силу сказаного выше $\sin \theta$ на θ , g на $l\omega^2$ и сокращая на ml^2 получим уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

Его решение с начальными условиями $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = A\omega$ есть

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t} \sin \omega t.$$

Обозначим A_n значение A на n -том полупериоде. Каждый полупериод $\dot{\theta}$ увеличивается на ω_D , значит

$$A_{n+1} = A_n e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} + \frac{\omega_D}{\omega}.$$

Предельная амплитуда находится из условия

$$A = Ae^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} + \frac{\omega_D}{\omega}$$

откуда $A = \frac{\omega_D}{\omega} \left(1 - e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}}\right)^{-1}.$

Рекуррентное соотношение на A_n можно переписать так:

$$A - A_{n+1} = (A - A_n)e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}}.$$

Это позволяет найти γ по нескольким пикам (в предположении что γ мало и максимальное значение θ равно A):

$$\gamma = \frac{\omega}{\pi} \frac{1}{m - n} \ln \frac{A - A_n}{A - A_m}.$$

Например, $A_n = 0.14, A_m = 0.19, m - n = 6$ (число полупериодов вдвое больше числа периодов). Получается $\gamma = 0.40$. $\gamma/\omega = 0.02$ и затухание действительно мало.

Остается найти ω_D .

$$\omega_D = \omega A \left(1 - e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}}\right) = 0.37 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \omega &= 20 \text{ с}^{-1}, \\ A &= 0.3 \text{ рад}, \\ \gamma &= 0.40 \text{ с}^{-1}, \\ \omega_D &= 0.37 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \end{aligned}$$

B1^{0.20} Выразите $\dot{x}(t)$ через $A(t)$ и $A^*(t)$.

Ответ получается непосредственным дифференцированием.

Ответ:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}(\dot{A}e^{i\omega t} + i\omega A e^{i\omega t} + \dot{A}^*e^{-i\omega t} - i\omega A^*e^{-i\omega t})$$

B2^{0.30} Выразите $\ddot{x}(t)$ через $A(t), A^*(t), \dot{A}(t)$.

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\omega^2}{2}(Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2}(i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - i\omega\dot{A}^*e^{-i\omega t})$$

Учитывая, что мы наложили условие $\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{A}^*e^{-i\omega t} = 0$, упрощаем это выражение и получаем ответ.

Ответ:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\omega^2(Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}) + i\omega\dot{A}e^{i\omega t}$$

B3 ^{0.50} Используя уравнение колебаний, найдите выражение для $\dot{A}$ через $A, \gamma, \omega, \varepsilon$.

Подставляем полученное в уравнение колебаний:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{2}(Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}) + i\omega\dot{A}e^{i\omega t} + \gamma(i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega A^*e^{-i\omega t}) + \frac{\omega^2}{2}(Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}) = \\ = \varepsilon\frac{1}{8}(Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t})^3. \end{aligned}$$

Отсюда выражаем $\dot{A}$.

Ответ:

$$\begin{aligned} \dot{A} = \frac{1}{2i\omega}e^{-i\omega t} \left(-2\gamma(i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega A^*e^{-i\omega t}) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{4}(A^3e^{3i\omega t} + 3A|A|^2e^{i\omega t} + A^{*3}e^{-3i\omega t} + 3A^*|A|^2e^{-i\omega t}) \right) \end{aligned}$$

B4 ^{0.20} Учитывая это, напишите упрощенное уравнение на $\dot{A}(t)$.

В уравнении, полученном в **B3**, нужно просто отбросить все члены, содержащие $e^{-in\omega t}$, $n \neq 0$.

Ответ:

$$\dot{A} = -A \left(\gamma + \frac{3\varepsilon}{8\omega}i|A|^2 \right)$$

B5 ^{0.60} Предположим, что трения нет, $\gamma = 0$. Пусть начальное значение A равно A_0 .

Решите уравнение из **B4** и получите $A(t)$ и $x(t)$.

Положив в уравнении, полученном в **B4**, $\gamma = 0$, получаем

$$\dot{A} = -i\frac{3\varepsilon|A|^2}{8\omega}A.$$

Из геометрических соображений ясно, что это уравнение описывает поворот вектора A в комплексной плоскости без изменения его модуля. Поэтому решение уравнения ищем в виде

$$A(t) = A_0e^{ist}.$$

Получаем

$$s = -\frac{3\varepsilon|A|^2}{8\omega},$$

откуда сразу же получаются ответы для $A(t)$ и $x(t)$.

Ответ:

$$\begin{aligned} A(t) = A_0 \exp \left[-i\frac{3\varepsilon|A_0|^2}{8\omega}t \right] \\ x(t) = \operatorname{Re} \left\{ A_0 \exp \left[i \left(\omega - \frac{3\varepsilon|A_0|^2}{8\omega} \right) t \right] + A_0^* \exp \left[-i \left(\omega - \frac{3\varepsilon|A_0|^2}{8\omega} \right) t \right] \right\} \end{aligned}$$

B6 ^{0.40} Найдите первую поправку $\Delta\omega$ к частоте колебаний, описываемых уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

с небольшой амплитудой $A \ll 1$. Чему равна $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ при амплитуде найденной в **A1**?

Разложим синус в ряд Тейлора:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3.$$

Таким образом, в первом приближении уравнение колебания маятника описываются уравнением из **B4** с

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{6}\omega^2.$$

Из **B5** мы знаем, что его решение можно представить в виде

$$A(t) = A_0 \exp\left(-i\frac{|A_0|^2\omega t}{16}\right) \implies \\ \implies x(t) = \operatorname{Re}\left\{A_0 \exp\left[i\left(1 - \frac{1}{16}A^2\right)\omega t\right]\right\}.$$

Отсюда сразу же получаем ответ.

Ответ:

$$\Delta\omega = -\frac{1}{16}A^2\omega, \\ \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx -6 \cdot 10^{-3}$$

C1 0.70

Начнем с вспомогательной задачи. Пусть метрономы стоят на неподвижной доске и совершают колебания с известными зависимостями $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$. В первом порядке по амплитудам колебаний найдите силу, действующую на доску. Выразите ответ через $\theta_1, \theta_2, D_1, D_2$ и постоянные, характеризующие метрономы.

На доску действуют силы натяжения нитей маятников, равные в первом приближении $mg \sin \theta_1$ и $mg \sin \theta_2$. По третьему закону Ньютона во время толчка на доску действует также сила $-ml(D_1 + D_2)$. В итоге получаем ответ.

Ответ:

$$F = mg(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - ml(D_1 + D_2)$$

C2 1.00

Напишите уравнения движения грузов в системе отсчета доски, то есть выразите $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ через $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \omega, \gamma, \alpha, D_1, D_2$.

Система отсчёта доски – неинерциальная система отсчёта, движущаяся с ускорением $a = \frac{F}{M}$, тогда в законе Ньютона для грузов в первом приближении должен фигурировать дополнительный член $-ma$. Переписав его через углы θ_1 и θ_2 , получим ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 2\gamma\dot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = \alpha [-(\theta_1 + \theta_2)\omega^2 + (D_1 + D_2)] \\ \ddot{\theta}_2 + 2\gamma\dot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = \alpha [-(\theta_1 + \theta_2)\omega^2 + (D_1 + D_2)] \end{cases}$$

C3 2.00

Фазовая диаграмма колебания – изображение движения маятника на плоскости с координатами $\dot{\theta}, \omega\theta$. Предположим, что установился режим колебаний, в котором их амплитуды постоянны, но при этом есть некоторая разность фаз ψ . Постройте фазовую диаграмму первого осциллятора за один период. Укажите на ней точки, в которых срабатывают спусковые механизмы метрономов. Найдите изменение разности фаз между метрономами за период $\Delta\psi$.

Как было найдено в **A1**, в момент пересечения оси $\dot{\theta}$ значение $\dot{\theta}$ изменяется на $\gamma\pi A$. Когда через некоторое время эту ось пересекает первый маятник, второй также испытывает возмущение и его $\dot{\theta}$ изменяется на $\alpha\gamma\pi A$. Фаза колебаний, с точностью до константы равная углу, на который повернулась точка на фазовом портрете, при этом уменьшается на

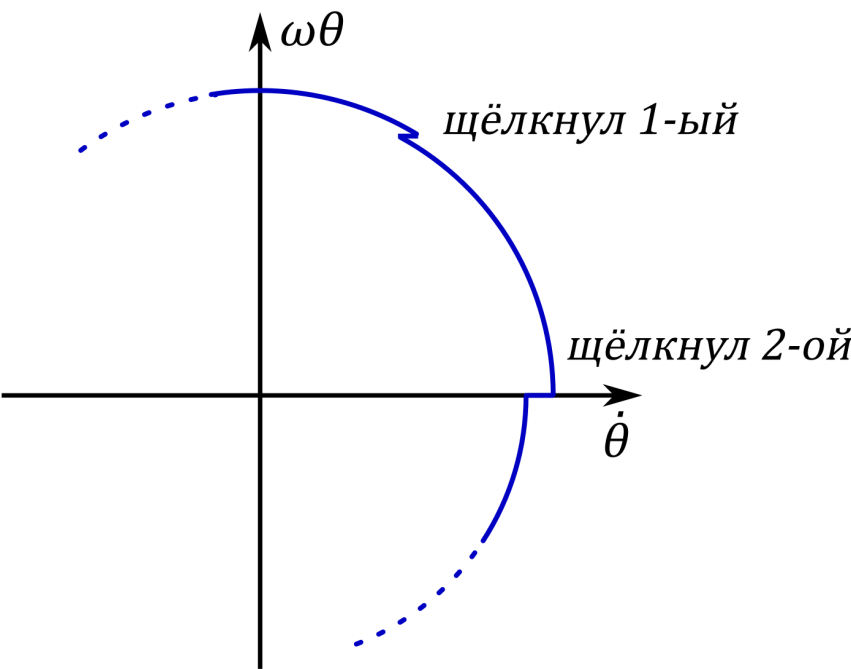
$$\frac{\alpha\gamma\pi A \sin \psi}{\omega A} = \frac{\alpha\gamma\pi}{\omega} \sin \psi.$$

Когда таким же образом щелчок второго метронома влияет на фазу первого, разность фаз между ними снова уменьшается. Таким образом за полупериод

$$\Delta\psi = -2\frac{\alpha\gamma\pi}{\omega} \sin \psi.$$

За период эта величина будет в два раза больше.

Ответ:



C4^{0.70}

Покажите, что изменение разности фаз между осцилляторами удовлетворяет уравнению Курамото

$$\dot{\psi} = -B \sin \psi.$$

Найдите выражение для постоянной B и ее численное значение, если $\alpha = 10^{-2}$.

Так как мы считаем затухания малыми, то и изменение фаз за период оказывается малой величиной. Поэтому можем перейти к непрерывному пределу и получить ответ.

Ответ:

$$B = 2\gamma\alpha = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$$

C5^{0.80}

Предположим, что собственные частоты осцилляторов немного отличаются и равны ω_1 и ω_2 , где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$. Найдите выражение для $\dot{\psi}$ в этом случае. При какой максимальной разности частот $\Delta\omega_{\max}$ возможна синхронизация?

Перепишем уравнения движения маятников из **C2**, учитывая разные частоты маятников. Получим

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 2\gamma\dot{\theta}_1 + \omega_1^2\theta_1 = \alpha [-(\theta_1 + \theta_2)\omega^2 + (D_1 + D_2)] \\ \ddot{\theta}_2 + 2\gamma\dot{\theta}_2 + \omega_2^2\theta_2 = \alpha [-(\theta_1 + \theta_2)\omega^2 + (D_1 + D_2)] \end{cases}$$

Тогда аналогично

$$\dot{\psi} = \omega_1 - \omega_2 - \frac{3\omega^2 A^3 \alpha}{16\gamma} \sin \psi.$$

Синхронизация возможна, когда это уравнение имеет корни, откуда сразу же получается ответ для $\Delta\omega_{\max}$.

Ответ:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega_1 - \omega_2 - \frac{3\omega^2 A^3 \alpha}{16\gamma} \sin \psi, \\ \Delta\omega_{\max} &= \frac{3\omega^3 A^3 \alpha}{16\gamma} \end{aligned}$$

C6^{0.20}

Пусть разность частот $\Delta\omega$ меньше максимальной. Найдите установившуюся разность фаз ψ осцилляторов.

При установившейся разности фаз метрономов $\dot{\psi} = 0$. Ответ получается подстановкой этого в выражение, полученное в **C5**.

Ответ:

$$\psi = \arcsin \frac{16\gamma\Delta\omega}{3\omega^3 A^3 \alpha}$$

C7^{0.90} Пусть в системе из двух метрономов разность частот равна $\Delta\omega = 0.1\text{c}^{-1}$. При этом разность фаз $\psi = 0.5$ рад. В некоторый момент времени груз одного из метрономов немного смещается и разность частот обращается в 0. Найдите время t , за которое метрономы полностью синхронизируются, то есть их разность фаз станет меньше 0.01 рад.

Необходимо решить уравнение Курамото с начальным условием

$$\psi(0) = 0.5.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = -B \sin \psi &\implies \int_{0.5}^{\psi(t)} \frac{d\psi}{\sin \psi} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right| \bigg|_{0.5}^{\psi(t)} = -Bt \implies \\ &\implies t(\psi) = \frac{\sin \psi_0}{\Delta\omega} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} 0.05} \right|. \end{aligned}$$

Ответ:

$$t = \frac{\sin \psi}{\Delta\omega} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} 0.05} \right| \approx 18.9 \text{ c}$$