

A1 ^{1.50} Найдите значение радиуса круговой орбиты $R_{\text{ДПС}}$, при котором механическое напряжение в области контакта объектов равняется нулю. Величина $R_{\text{ДПС}}$ является пределом Роша R_{Roche} для двойной планетарной системы

Пусть ω - угловая скорость вращения системы. Тогда из теоремы о движении центра масс получим:

$$2m\omega^2 R = GMm \left(\frac{1}{(R-r)^2} + \frac{1}{(R+r)^2} \right)$$

Рассмотрим отдельном условие движения центра ближнего объекта по окружности радиуса $R - r$:

$$m\omega^2(R-r) = \frac{GMm}{(R-r)^2} + N - \frac{Gm^2}{4r^2}$$

Комбинируя, находим:

$$N = \frac{Gm^2}{4r^2} + \frac{GMm}{2R} \left(\frac{R-r}{(R+r)^2} - \frac{R+r}{(R-r)^2} \right)$$

Учитывая, что $R_0 \gg r$, находим:

$$N \approx \frac{Gm^2}{4r^2} - \frac{3GMmr}{R^3}$$

Сила механического взаимодействия между объектами неотрицательна при

$$R \geq r \sqrt[3]{\frac{12M}{m}}$$

Тогда для $R_{\text{ДПС}}$ имеем:

Ответ:

$$R_{\text{ДПС}} = r \sqrt[3]{\frac{12M}{m}}$$

B1 ^{0.70} Получите точное выражение для суммарного потенциала $\varphi_{\text{внеш}}$ в поле центробежной силы и гравитационного поля планеты. Ответ выразите через x, y, z, G, ρ_M, R_0 и R .

Орбитальная угловая скорость движения спутника ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

где $M = \frac{4\pi R_0^3 \rho_M}{3}$.

Потенциальная энергия частицы массой m в поле центробежной силы (считаем её равной нулю на оси вращения) равна

$$W_p = -\frac{m\omega^2 r_{\perp}^2}{2}$$

где $r_{\perp}$ - расстояние от частицы до оси вращения.

Тогда для потенциала имеем:

$$\varphi = -\frac{4\pi R_0^3 \rho_M G}{3R} \left(\frac{R}{r} + \frac{r_{\perp}^2}{2R^2} \right) - \varphi_O$$

откуда:

Ответ:

$$\varphi = \frac{2\pi R_0^3 \rho_M G}{R} - \frac{4\pi R_0^3 \rho_M G}{3R} \left(\frac{R}{\sqrt{(R+x)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{(R+x)^2 + y^2}{2R^2} \right)$$

B2 ^{0.80} В приближении $x, y, z \ll R$ выражение для потенциала φ можно представить в следующем виде:

$$\varphi_{\text{внеш}} = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2$$

Найдите коэффициенты A_1 , B_1 и C_1 . Ответы выразите через R , G , R_0 и ρ_M .

Для разложения $\frac{R}{\sqrt{(R+x)^2+y^2+z^2}}$ имеем:

$$\frac{R}{\sqrt{(R+x)^2+y^2+z^2}} \approx 1 - \frac{x}{R} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2} + \frac{3x^2}{2R^2}$$

Подставляя в выражение для φ , получим:

$$\varphi = -\frac{2\pi R_0^3 \rho_M G}{R^3} x^2 + \frac{2\pi R_0^3 \rho_M G}{3R^3} z^2$$

Таким образом:

Ответ:

$$A = -\frac{2\pi R_0^3 \rho_M G}{R^3} \quad B = 0 \quad C = \frac{2\pi R_0^3 \rho_M G}{3R^3}$$

C1^{0.80}

Докажите, что гравитационное поле внутри полости равняется нулю.

Обратимся к доказательству равенства нулю в полости шара, concentричной ему.

Рассмотрим некоторую точку полости A . выделим два элементарных объёма dV_1 и dV_2 , поля которых компенсируют друг-друга:

$$\frac{dV_1}{r_1^2} = \frac{dV_2}{r_2^2}$$

Произвольных эллипсоид может быть получен сжатием из сферы вдоль взаимно перпендикулярных осей.

Поскольку объём любого элементарного параллелепипеда $dV = dx dy dz$, все элементарные объёмы уменьшаются в одно и то же число раз.

Также сохраняются и соотношения расстояний между точками.

Тогда, поскольку внутри полости шара суммарное гравитационное поле равно нулю, то нулю равно и гравитационное поле внутри полости эллипсоида.

C2^{0.40}

Пусть потенциал в центре эллипсоида равен φ_0 .

Рассмотрим точку внутри эллипсоида, радиус-вектор относительно центра равен $\vec{r}$. Потенциал в данной точке равен φ_1 .

Чему в также лежащей внутри эллипсоида точке с радиус-вектором $\gamma \vec{r}$ равен потенциал $\varphi_2 = \varphi(\gamma \vec{r})$?

Ответ выразите через φ_0 , φ_1 и γ .

Рассмотрим точки 1 и 2, лежащие на одной прямой, проходящей через центр эллипсоида. Пусть расстояния от центра эллипсоида до этих точек равны r_1 и r_2 соответственно, а рассматриваемая прямая составляет угол α с осью x .

Обе точки принадлежат границам подобных рассматриваемому эллипсоидов с некоторыми коэффициентами k_1 и k_2 . Поскольку внутри эллипсоидальных полостей гравитационное поле равняется нулю, разность потенциалов между точкой 1 и центром рассматриваемого эллипсоида $\varphi_1 - \varphi_0 = f(\alpha)r_1^2$, а также $\varphi_2 - \varphi_0 = f(\alpha)r_2^2$, где $f(\alpha)$ - некоторая функция, зависящая только от угла α .

Отсюда находим:

Ответ:

$$\varphi_2 = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)\gamma^2$$

C3^{1.00}

Покажите, что в точке эллипсоида с координатами x, y, z потенциал можно представить в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + A_2 x^2 + B_2 (y^2 + z^2)$$

Примечание: обратите внимание, что данное выражение применимо для эллипсоидов сколь угодно малых размеров

Расстояния r могут быть сколь угодно малыми. Рассмотрим точки, близкие к центру эллипсоида. Для них:

$$\vec{g} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} dz$$

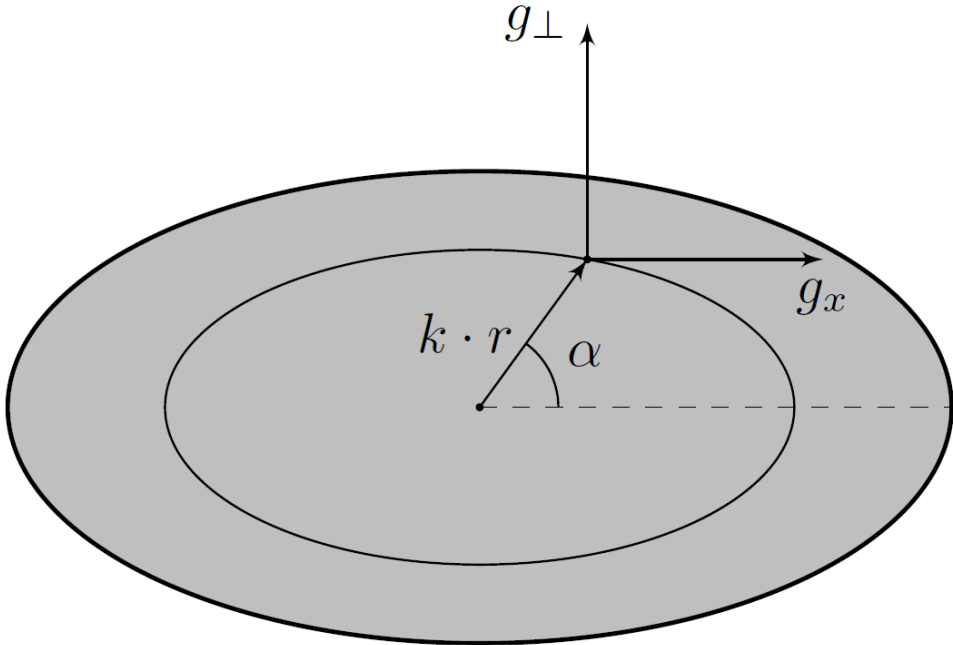
где все производные берутся в начале координат. Поскольку эллипсоид - симметричная фигура для точек лежащих на осях x, y и z верно соответственно.

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial x} \vec{e}_x \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial y} \vec{e}_y \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

отсюда найдём:

$$\frac{\partial g_r}{\partial r} = -2f(\alpha) = (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x) \frac{\partial g_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y) \frac{\partial g_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z) \frac{\partial g_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

Пусть $g_{\perp}$ - компонента гравитационного поля эллипсоида, перпендикулярная оси x .



Учитывая, что для эллипсоида вращения $\frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{\partial g_{\perp}}{\partial r_{\perp}}$, получим

$$-2f(\alpha) = \frac{\partial g_x}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial g_{\perp}}{\partial r_{\perp}} \sin^2 \alpha$$

Поскольку соотношение верно для любых α , все частные производные должны оставаться постоянными в любой точке эллипсоида. Подставляя в выражение для потенциала, найдём:

Ответ:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial g_x}{\partial x} \frac{x^2}{2} - \frac{\partial g_{\perp}}{\partial r_{\perp}} \frac{(y^2 + z^2)}{2}$$

C4^{0.30}

Выразите B_2 через A_2 , G и ρ .

Примечание: воспользуйтесь теоремой Гаусса в дифференциальной форме для гравитационного поля:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi\rho G$$

Из теоремы Гаусса в дифференциальной форме находим:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -2A_2 - 4B_2 = -4\pi G\rho$$

откуда:

Ответ:

$$B_2 = \pi G\rho - \frac{A_2}{2}$$

C5^{0.30}

Потенциал φ на поверхности эллипсоида можно представить как функцию только координаты x в следующем виде:

$$\varphi = C_2 + x^2 D_2$$

Выразите C_2 и D_2 через φ_0 , A_2 , G , ρ , a , x и эксцентриситет e .

$$y^2 + z^2 = a^2(1 - e^2) - (1 - e^2)x^2$$

откуда:

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\pi \rho G - \frac{A_2}{2} \right) a^2 (1 - e^2) + \left(\frac{A_2(3 - e^2)}{2} - \pi \rho G (1 - e^2) \right) x^2$$

Ответ:

$$C_2 = \varphi_0 + \left(\pi \rho G - \frac{A_2}{2} \right) a^2 (1 - e^2) \quad D_2 = \frac{A_2(3 - e^2)}{2} - \pi \rho G (1 - e^2)$$

C6^{0.50} Решим вспомогательную задачу: по поверхности диска радиуса R равномерно распределена масса с поверхностной плотностью σ . Найдите потенциал диска $\varphi_{\text{д}}$ на оси на расстоянии x от его центра. Ответ выразите через σ , G , R и x .

Разобьём диск на кольца:

$$\varphi_{\text{д}} = -\pi \sigma G \int_0^R \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Ответ:

$$\varphi_{\text{д}} = -2\pi \sigma G \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right)$$

C7^{1.00} Найдите потенциал φ_0 в центре эллипсоида. Ответ выразите через G , ρ , a и e .
Примечание: вам может понадобиться следующий интеграл:

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{x \sqrt{1 + x^2} + \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)}{2} + C$$

Разобьём эллипсоид на диски, при этом учтём, что $d\sigma = \rho dx$:

$$\varphi_0 = -2\pi \rho G \cdot 2 \int_0^a \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \right) dx$$

Интеграл от второго слагаемого равен $-\frac{a^2}{2}$. Подставим $y^2 + z^2$ из уравнения эллипсоида:

$$\varphi = 2\pi \rho G a^2 - 4\pi \rho G \int_{-a}^a \sqrt{b^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}} dx = 2\pi \rho G a^2 - \frac{4\pi \rho G a b^2}{c} \int_0^{\frac{c}{b}} \sqrt{1 + t^2} dt$$

Воспользуемся первообразной:

$$\varphi_0 = 2\pi \rho G a^2 - \frac{2\pi \rho G a b^2 \left(\frac{ac}{b^2} + \ln \left(\frac{a + c}{b} \right) \right)}{c}$$

Выразим через эксцентриситет:

Ответ:

$$\varphi_0 = -\frac{2\pi \rho G a^2 (1 - e^2)}{e} \ln \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$$

C8^{1.00} Найдите потенциал эллипсоида φ_a в точке с координатами $(x, y, z) = (a, 0, 0)$. Ответ выразите через G , ρ , a и e .
Примечание: вам может понадобиться следующий интеграл:

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x \sqrt{x^2 - 1} - \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)}{2} + C$$

Вновь разобьём эллипсоид на диски:

$$\varphi_a = -2\pi\rho G \int_{-a}^a \left(\sqrt{(a+x)^2 + y^2 + z^2} - (x+a) \right) dx$$

Интеграл от второго слагаемого равен $-2a^2$. Подставим $y^2 + z^2$ из уравнения эллипсоида и преобразуем:

$$\int_{-a}^a \sqrt{(a+x)^2 + y^2 + z^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{\left(\frac{cx}{a} + \frac{a^2}{c}\right)^2 - \frac{b^4}{c^2}} dx = \frac{ab^4}{c^3} \int_{\frac{a^2-c^2}{b^2}}^{\frac{a^2+c^2}{b^2}} \sqrt{t^2 - 1} dt =$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)^2}{e^3} \int_1^{\frac{1+e^2}{1-e^2}} \sqrt{t^2 - 1} dt = a^2 \left(\frac{(1+e^2)}{e^2} - \frac{(1-e^2)^2}{e^3} \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right)$$

откуда:

Ответ:

$$\varphi_a = -2\pi\rho G a^2 \left(\frac{(1-e^2)}{e^2} - \frac{(1-e^2)^2}{e^3} \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right)$$

C9^{0.20}

Найдите коэффициент A_2 . Ответ выразите через G , ρ и e .

$$\varphi_a - \varphi_0 = A_2 a^2 = 2\pi\rho G a^2 \left(\frac{1-e^2}{e^3} \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \frac{(1-e^2)}{e^2} \right)$$

откуда

Ответ:

$$A_2 = 2\pi\rho G \left(\frac{1-e^2}{e^3} \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \frac{(1-e^2)}{e^2} \right)$$

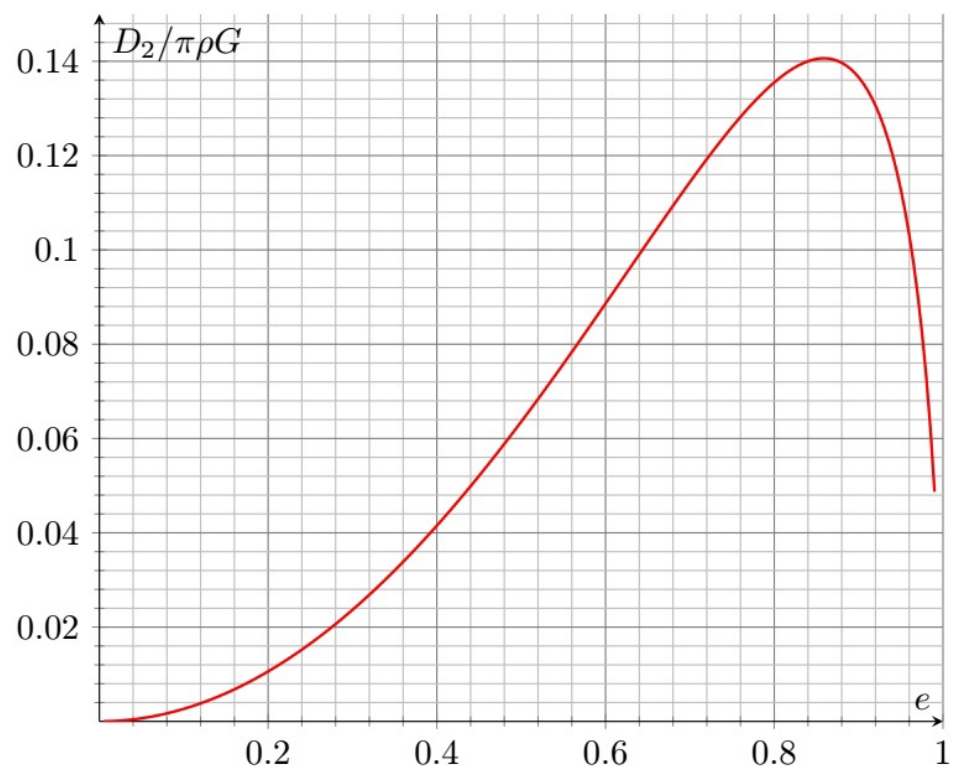
D1^{0.70}

Постройте на листе миллиметровой бумаги график зависимости коэффициента D_2 от эксцентриситета e эллипсоида, образованного спутником.

Подставим A_2 в выражение для D_2 :

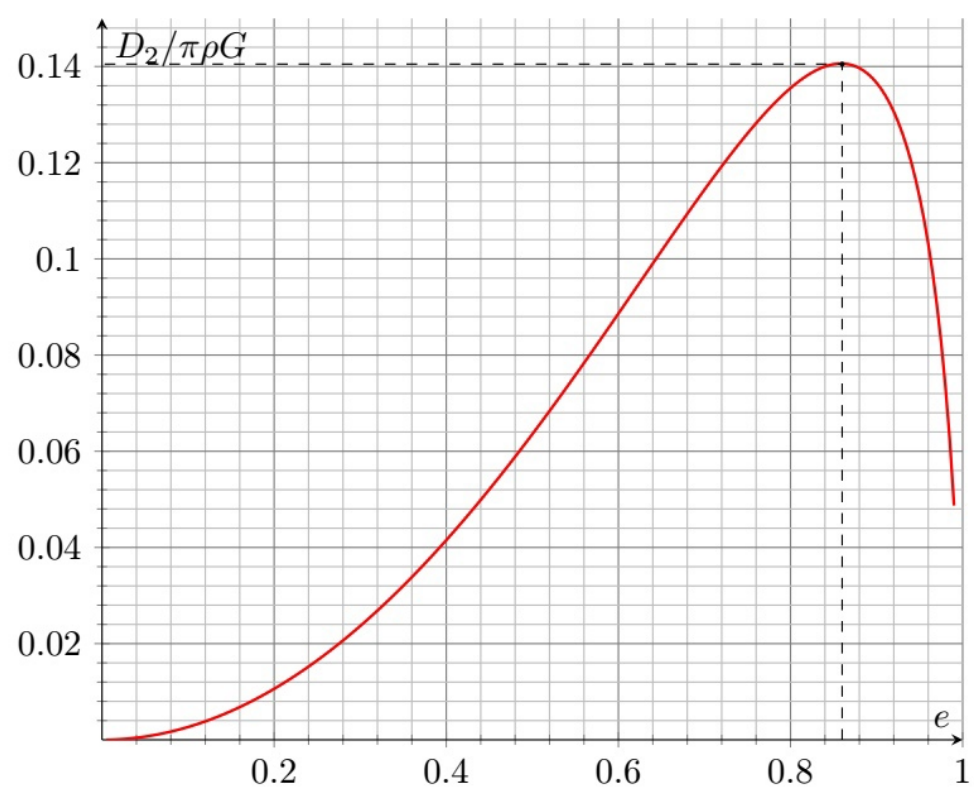
$$D_2 = \pi\rho G \frac{1-e^2}{e^3} \left((3-e^2) \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 3e \right)$$

Ответ:



D2^{0.30} При каком значении эксцентриситета e предел Роша достигается?

При достижении функцией D_2 максимума дальнейшее уменьшение радиуса круговой орбиты является невозможным, поэтому спутник разрушается. Мысль о решении уравнения для равной нулю производной не является разумной.



Из графика находим:

Ответ:

$$e = 0,86 \pm 0,02$$

D3^{0.50} Найдите предел Роша R_{Roche} . Ответ выразите через R_0 , ρ_M и ρ_m .

Значение D_2 в экстремуме равняется

$$D_{2max} \approx 0,14\pi\rho_m G$$

откуда:

Ответ:

$$R_{Roche} \approx 2,43 R_0 \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$$