

A1 ^{0.20} Пусть плоская волна амплитуды E_0 распространяется в плоскости xz под углом θ к оси z . Запишите выражение для комплексной амплитуды $f(\vec{r})$.

Ответ:

$$f(\vec{r}) = E_0 e^{ikz \cos \theta + ikx \sin \theta}$$

A2 ^{0.50} Пусть в плоскости $z = 0$ комплексная амплитуда имеет вид $f = E_0 e^{iu x}$. Найдите выражение для комплексной амплитуды в плоскости с произвольной координатой z .

В ответ должно входить волновое число волны k волны.

Получите приближенное выражение в случае $u \ll k$.

Ищите решение в виде плоской волны, распространяющейся под острым углом к оси z .

Поскольку известно, что волна плоская, можно определить проекцию ее волнового вектора на ось x : $k_x = u$. С учетом направления распространения $k_z = \sqrt{k^2 - u^2} \approx k - \frac{u^2}{2k}$. Таким образом, волна распространяется под углом $\arcsin \frac{u}{k}$ к оси z . Формулы применимы при условии $u \ll k$.

Ответ:

$$f(\vec{r}) = E_0 e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z + i u x} \approx E_0 e^{ikz - i\frac{u^2}{2k} z + i u x}$$

A3 ^{0.70} Пусть в плоскости $z = 0$ находится дифракционная решетка, коэффициент пропускания которой (по амплитуде) имеет вид:

$$\tau(x) = \alpha + \beta \cos ux.$$

Перпендикулярно решетке на нее падает плоская электромагнитная волна с волновым числом k и амплитудой E_0 .

Найдите выражение для комплексной амплитуды волны в плоскости с $z > 0$.

Используйте результат предыдущего пункта и принцип суперпозиции.

Амплитуда волны в плоскости $z = 0$ сразу после прохождения дифракционной решетки равна

$$f = E_0 (\alpha + \beta \cos ux) = E_0 \alpha + \frac{E_0 \beta}{2} (e^{iu x} + e^{-iu x}).$$

Получаем 3 слагаемых, каждое из которых аналогично рассмотренному в предыдущем пункте. Значит по принципу суперпозиции за решеткой будет распространяться 3 плоских волны, а комплексная амплитуда имеет вид

Ответ:

$$f = \alpha E_0 e^{ikz} + \frac{\beta E_0}{2} e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z + i u x} + \frac{\beta E_0}{2} e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z - i u x}$$

A4 ^{0.60} За дифракционной решеткой из предыдущего пункта поставили линзу с фокусным расстоянием F . Какое изображение будет в фокальной плоскости такой линзы? Укажите его характерные размеры.

Линза собирает каждую из плоских волн в одну точку. Поэтому изображение в фокальной плоскости – 3 точки, одна из которых лежит на оптической оси, а остальные две смещены на расстояние

$$d = F \tan \theta = F \frac{u}{\sqrt{k^2 - u^2}} \approx F \frac{u}{k}$$

Ответ: 3 точки на расстоянии $F \frac{u}{k}$.

A5 ^{0.50} Оказывается, что на некотором расстоянии от периодической структуры распределение интенсивности точно такое же, как на ней самой. (Это явление называется саморепродукцией.) При каких значениях координаты z это происходит?

За периодической структурой распространяется 3 плоских волны. Распределение интенсивности зависит от их относительных фаз, поэтому исходное изображение восстановится, если восстановятся такие же фазовые соотношения между волнами, как и в плоскости $z = 0$. Фаза центральной волны зависит от координаты как kz , а побочных волн как $\sqrt{k^2 - u^2} z$, поэтому фазы выравниваются при условии

$$z(k - \sqrt{k^2 - u^2}) = 2\pi m.$$

m – целое число.

Ответ:

$$z = \frac{2\pi m}{k - \sqrt{k^2 - u^2}} \approx \frac{4\pi m k}{u^2}.$$

A6 ^{0.50} Считая, что $kh n_1 \ll 1$, запишите выражение для комплексной амплитуды волны между линзой и дифракционной решеткой. Как будет выглядеть изображение в фокальной плоскости линзы ($z = 3F$)?

Дифракционная решетка создает для проходящей волны дополнительную фазу

$$e^{in_1 kh \cos ux} \approx 1 + in_1 kh \cos ux.$$

Постоянную фазу $e^{ikn_0 h}$ не учитываем, поскольку она не влияет на распределение интенсивностей. Тогда амплитуда волны сразу после решетки

$$f = E_0(1 + in_1 kh \cos ux) = E_0 + \frac{in_1 kh E_0}{2}(e^{iux} + e^{-iux})$$

То есть опять получили 3 плоских волны, а значит изображение в плоскости линзы – 3 точки, как и в A4

Ответ:

$$f = E_0(1 + in_1 kh \cos ux) = E_0 + \frac{in_1 kh E_0}{2}(e^{iux} + e^{-iux})$$

A7 ^{0.50} Разместим на оптической оси в фокальной плоскости линзы ($z = 3F$) небольшую пластинку (размером меньше, чем размер изображения в фокальной плоскости, так что изменяется только его центральная часть), которая вносит дополнительное запаздывание по фазе $\pi/2$. Как теперь выглядит изображение на расстоянии $2F$ от линзы (в плоскости $z = 4F$)? Запишите зависимость интенсивности от x .

Если добавить пластинку, фаза центральной волны увеличится на $\pi/2$, а ее амплитуда умножится на i . Поскольку известно, что без пластинки распределение амплитуды в плоскости $z = 4F$ такое же, как и в плоскости дифрешетки (линза не вносит дополнительной разности фаз), амплитуду с пластинкой можно получить, умножив амплитуду центральной волны на i ,

$$f = iE_0(1 + n_1 kh \cos ux)$$

а значит интенсивность

Ответ:

$$I = E_0^2(1 + n_1 kh \cos ux)^2 \approx E_0^2(1 + 2n_1 kh \cos ux)$$

A8 ^{0.50} Теперь вместо прозрачной пластинки, вносящей сдвиг фаз, поставили непрозрачный экран такого же размера. Запишите зависимость интенсивности от x в этом случае.

Если в центре поставить пластинку, то центральная волна пропадет, и останется только член с косинусом, а амплитуда в изображении

$$f = iE_0 n_1 kh \cos ux$$

Ответ:

$$I = (E_0 n_1 kh)^2 \cos^2 ux.$$

B1 ^{0.20} Пусть от предмета идет одна плоская волна амплитуды E_1 под углом α к оси z , опорная волна амплитуды E_0 падает под углом $-\theta$ к оси z (знак $-$ означает, что угол отсчитывается в противоположную сторону, при этом $\theta > 0$). Фотографическая пластинка расположена в плоскости $z = 0$. Найдите распределение интенсивности $I(x)$ на пластинке.

Амплитуда в плоскости пластинки

$$f = E_1 e^{ik\alpha x} + E_0 e^{-ik\theta x}.$$

Ответ:

$$I = E_0^2 + E_2^2 + 2E_1E_0 \cos kx(\alpha + \theta)$$

В2 0.50

Пусть на полученную таким способом голограмму падает только опорная волна (под тем же углом, что и в предыдущем пункте). В результате дифракции за пластинкой будет несколько плоских волн. Найдите, под какими углами к оси z они будут распространяться.

Коэффициент пропускания пластинки

$$\tau(x) = 1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2) - 2\gamma E_0E_1 \cos kx(\alpha + \theta)$$

При восстановлении амплитуда волны сразу за пластинкой

$$f = E_0 e^{-ik\theta x} \tau(x) =$$

$$E_0(1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2)) - \gamma E_0^2 E_1 e^{ik\alpha} - \gamma E_0^2 E_1 e^{ik(-\alpha - 2\theta)}$$

Значит, за пластинкой распространяется 3 волны под углами α , $-\theta$, $-\alpha - 2\theta$.

Ответ:

$$\varphi = \alpha, -\theta, -\alpha - 2\theta.$$

В3 0.80

Пусть теперь от объекта идут две плоских волны амплитуд E_1 и E_2 под близкими друг к другу углами α_1 и α_2 соответственно. Опорная волна идет по-прежнему под углом θ к нормали, ее амплитуда E_0 . Найдите распределение интенсивности в плоскости $z = 0$.

Амплитуда в плоскости $z = 0$:

$$f(x) = E_1 e^{ik\alpha_1 x} + E_2 e^{ik\alpha_2 x} + E_0 e^{-ik\theta x}$$

, значит распределение интенсивности

$$I(x) = E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos kx(\alpha_1 - \alpha_2) + 2E_0E_1 \cos kx(\alpha_1 + \theta) + \\ + 2E_0E_2 \cos kx(\alpha_2 + \theta)$$

Ответ:

$$I(x) = E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos kx(\alpha_1 - \alpha_2) + 2E_0E_1 \cos kx(\alpha_1 + \theta) + \\ + 2E_0E_2 \cos kx(\alpha_2 + \theta)$$

В4 1.20

Пусть теперь голограмма освещается только опорной волной. Сколько волн будет распространяться за голограммой, под какими углами и с какими амплитудами? Считайте, что $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \ll \alpha \ll 1$ и $\theta \ll 1$.

При восстановлении распределение амплитуды волны по голограмме

$$f = E_0 e^{-ikx\theta} (1 - \gamma I(x)) =$$

$$E_0 e^{-ikx\theta} (1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2 + E_2^2)) - \gamma E_0 E_1 E_2 (e^{ikx(-\theta + \alpha_1 - \alpha_2)} + e^{ikx(-\theta + \alpha_2 - \alpha_1)})$$

$$- \gamma E_0^2 E_1 (e^{ik\alpha_1 x} + e^{ik(-\alpha_1 - 2\theta)x}) - \gamma E_0^2 E_2 (e^{ik\alpha_2 x} + e^{ik(-\alpha_2 - 2\theta)x})$$

Значит в восстановленная волна будет состоять из 7 плоских волн, распространяющихся под углами

$$\varphi = -\theta, -\theta + \alpha_1 - \alpha_2, -\theta + \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 - 2\theta, -\alpha_2 - 2\theta$$

Их амплитуды соответственно равны

$$A = E_0(1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2 + E_2^2)), \gamma E_0 E_1 E_2, \gamma E_0^2 E_1, \gamma E_0^2 E_2$$

Есть одна волна с первой амплитудой и по две волны с оставшимися.

Ответ:

$$\varphi = -\theta, -\theta + \alpha_1 - \alpha_2, -\theta + \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 - 2\theta, -\alpha_2 - 2\theta$$

$$A = E_0(1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2 + E_2^2)), \gamma E_0 E_1 E_2, \gamma E_0^2 E_1, \gamma E_0^2 E_2$$

B5^{0.50} Часть волн из предыдущего пункта можно сгруппировать в изображения объекта. Сколько у объекта будет изображений и где они будут расположены?

Ответ: Одно изображение образовано двумя волнами, идущими под углами α_1, α_2 , другое – волнами, идущими под углами $-\alpha_1 - 2\theta, -\alpha_2 - 2\theta$.

B6^{0.30} Пусть голограмма имеет конечную ширину D . Какое минимальное угловое расстояние $\Delta\alpha$ между лучами можно будет различить в формируемом ей изображении?

Из-за конечного размера голограммы плоская волна после дифракции приобретает конечную угловую ширину

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{D}.$$

Она и определяет минимальный угловой размер, который можно разрешить

Ответ:

$$\Delta\alpha \approx \frac{\lambda}{D}$$

B7^{1.00} Мы пока рассматривали только монохроматическое излучение. Пусть теперь на голограмму из пункта B4 падает восстанавливающая волна с конечной шириной спектра $\Delta\lambda$. Из-за этого угловая ширина изображения увеличится. Оцените, при какой максимальной ширине спектра $\Delta\lambda$ можно будет восстановить объект с угловым размером $\Delta\alpha$. Выразите ответ через длину волны λ и углы α и θ .

Возьмем голограмму из пункта B2 и посветим на нее восстанавливающей волной с немного другим волновым числом k' . Тогда амплитуда в плоскости голограммы будет иметь вид

$$f = E_0 e^{-ik'x} (1 - \gamma(E_0^2 + E_1^2) - 2\gamma E_0 E_1 \cos kx(\alpha + \theta))$$

Как и раньше, после разложения косинуса, получим 3 плоских волны. Выберем ту из них, которая отвечает волне, распространяющейся под углом, близким к α . Ее амплитуда имеет вид

$$-2\gamma E_0^2 E_1 e^{-ik'x\theta + ikx(\alpha + \theta)}$$

значит эта волна распространяется под углом

$$\alpha' = -\theta + \frac{k}{k'}(\alpha + \theta),$$

то есть изображение сместилось на угол

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \frac{k - k'}{k'}(\alpha + \theta) \approx \frac{\Delta k}{k}(\alpha + \theta).$$

Значит максимальная ширина спектра

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha + \theta}$$

Ответ:

$$\Delta\lambda=\lambda\frac{\Delta\alpha}{\alpha+\theta}$$

C1 0.80 На пластинку падает волна от источника под углом α , опорная волна падает на пластинку по нормали. Тогда в объеме пластинки возникнут объемные интерференционные полосы. Найдите расстояние d между плоскостями, в которых интенсивность максимальна, а также угол β между этими плоскостями и осью z .

Положения интерференционных максимумов задаются уравнениями

$$(1-\cos\alpha)z-\sin\alpha x=m\lambda$$

Они представляют собой плоскости, повернутые на угол $\alpha/2$ к оси z (и перпендикулярные плоскости xz).

Расстояние между плоскостями вдоль оси x $\lambda/\sin\alpha$, а по нормали к ним $\frac{\lambda}{\sin\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}$.

Ответ:

$$\frac{\alpha}{2},\quad d=\frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}$$

C2 0.70 Падающее на голограмму излучение отражается от плоскостей максимальной интенсивности зеркально. Пусть пластина освещается белым светом, падающим на нее по нормали. При каком условии на длину волны интенсивность отраженного света будет максимальной? Под каким углом α' направлена отраженная волна?

После зеркального отражения волна распространяется под углом $\alpha'=\alpha$ к оси z .

Из условия Брэгга -Вульфа $2d\sin\frac{\alpha}{2}=m\lambda'$ находим длины волн, для которых отражение максимально

$$\lambda'=\frac{\lambda}{m}$$

Таким образом среди восстановленных волн есть волна с той же длиной волны, что и исходная, распространяющаяся под тем же углом.

Ответ:

$$\alpha'=\alpha,\quad \lambda'=\frac{\lambda}{m}$$