

A1 ^{1.00} Найдите v и w для первого волновода.

Так как x -компонента поля нормирована на значение в центре, линейризацией зависимости в сердцевине волновода является $\arccos E_x$. Угловой коэффициент полученной прямой равен v .

Линейризацией зависимости в оболочке волновода является $\ln E_x$. w представляет собой угловой коэффициент, взятый с противоположным знаком.

Ответ:

$$v = 1.210, \quad w = 3.064$$

A2 ^{0.40} Выразите ε_x , ρ и ε_z через v и w . Найдите ε_x , ρ и ε_z для первого волновода.

Один из возможных способов решения (**M1**) – выразить ε_z через v и w как

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon w}{v \tan v} = 11.52,$$

после чего можно выразить ρ и ε_x следующим способом:

$$\rho = \frac{\frac{\varepsilon w}{v \tan v} - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 0.57,$$
$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon w}{v \tan v}} = 4.51,$$

либо же (**M2**) как

$$\varepsilon_x = \frac{4\pi^2 a^2 \varepsilon - v^2}{\frac{w^2}{\varepsilon_z} + 4\pi^2 a^2} = 2.72$$
$$\rho = \frac{\frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}} = 0.20$$

Альтернативный метод (**M3**) – найти ε_x по перепаду поля при переходе от сердцевины волновода к его оболочке, т.е.

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{E_x|_{\hat{x}=1-0}}{E_x|_{\hat{x}=1+0}} = 5.01,$$

откуда потом выразить ρ и ε_z как

$$\rho = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_x} \right) = 0.63,$$
$$\varepsilon_z = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_x} = 12.44.$$

Альтернативные методы, логически корректные и не содержащие вычислительных ошибок, также засчитываются.

Все способы считаются эквивалентными и оцениваются одинаково. При наличии решения двумя способами второй способ оценивается в соответствии с **A3**.

Примечание: за **A3** даётся в два раза больше баллов, поскольку наличие второго способа оценки параметров волновода ценно с практической точки зрения, т.к. позволяет выбрать более точный метод.

A3 ^{0.80} Найдите ε_x , ρ и ε_z ещё одним способом. Сравните полученные результаты. На ваш взгляд, какой из них точнее?

Ответ: **M1**:

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon w}{v \tan v} = 11.52,$$
$$\rho = \frac{\frac{\varepsilon w}{v \tan v} - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 0.57,$$
$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon w}{v \tan v}} = 4.51$$

M2:

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon w}{v \tan v} = 11.52,$$
$$\varepsilon_x = \frac{4\pi^2 a^2 \varepsilon - v^2}{\frac{w^2}{\varepsilon_z} + 4\pi^2 a^2} = 2.72$$
$$\rho = \frac{\frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}} = 0.20$$

M3:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon \frac{E_x|_{\tilde{x}=1-0}}{E_x|_{\tilde{x}=1+0}} = 5.01, \\ \rho &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_x} \right) = 0.63, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_x} = 12.44\end{aligned}$$

A4 ^{1.50}

Повторите действия пунктов A1-3 для второго профиля. Что вы можете сказать о втором волноводе?

Ответ: **M1:**

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\varepsilon w}{v \tan v} = 1.73, \\ \rho &= \frac{\frac{\varepsilon w}{v \tan v} - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = -0.03, \\ \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon w}{v \tan v}} = 2.19\end{aligned}$$

M2:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\varepsilon w}{v \tan v} = 1.73, \\ \varepsilon_x &= \frac{4\pi^2 a^2 \varepsilon - v^2}{\frac{w^2}{\varepsilon_z} + 4\pi^2 a^2} = 1.75 \\ \rho &= \frac{\frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}} = -0.32\end{aligned}$$

B1 ^{0.50}

Выразите $\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$ через v , w , ε и ε_x .

Подсказка: Плотность потока энергии электромагнитного поля задаётся средним значением вектора Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{E} \times \vec{H}^*] \rangle$, где * обозначает комплексное сопряжение.

Непосредственно подставляя выражения для полей в сердцевине и оболочке волновода в выражение для вектора Пойнтинга, получаем

$$\langle S_z \rangle \propto \begin{cases} \frac{A^2}{\varepsilon} \cos^2(v\tilde{x}), & |\tilde{x}| < 1 \\ \frac{B^2}{\varepsilon_x} e^{-2w\tilde{x}}, & |\tilde{x}| > 1 \end{cases}$$

Интегрируя $\langle S_z \rangle$ по $\tilde{x}$ от 0 до 1, получаем

$$P_{\text{core}} \propto \frac{A^2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\sin(2v)}{2v} \right),$$

интегрируя от 1 до $+\infty$, получаем

$$P_{\text{cladding}} \propto \frac{B^2}{\varepsilon_x} \frac{e^{-2w}}{w}$$

(знак $\propto$ означает, что мы опускаем одинаковый числовой множитель у получаемых величин, поскольку в конечный ответ войдёт только их отношение). Наконец,

$$\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}} = \frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{core}} + P_{\text{cladding}}} = \frac{\varepsilon_x w (2v + \sin 2v)}{2\varepsilon v \cos^2 v + \varepsilon_x w (2v + \sin 2v)}.$$

Ответ:

$$\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}} = \frac{\varepsilon_x w (2v + \sin 2v)}{2\varepsilon v \cos^2 v + \varepsilon_x w (2v + \sin 2v)}$$

B2 ^{2.25}

Для анизотропного волновода найдите v , w и $\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$ для каждого из указанных значений a .

Для нахождения v и w необходимо было воспользоваться системой уравнений из условия. Наиболее удобным для решения оказывается исключить w из уравнений. В результате получаются два уравнения для итеративного решения:

$$v = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_x}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_x \varepsilon_z}{\varepsilon^2} \operatorname{tg}^2 v}}$$
$$v = \operatorname{arctg} \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_z}} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^2 (\varepsilon - \varepsilon_x)}{v^2} - 1} \right]$$

При некоторых значениях a к ответу сходится первое, а при других -- второе уравнение. w находится подстановкой полученного значения v в уравнение

$$w = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} v \operatorname{tg} v.$$

$\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$ рассчитывается по формуле, полученной в пункте **B1**. Пункт **B3** решается аналогично.

Ответ:

a	v	w	$\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$
0.01	0.132	0.022	0.027
0.02	0.256	0.087	0.102
0.03	0.388	0.201	0.219
0.04	0.482	0.319	0.321
0.05	0.575	0.472	0.430
0.06	0.657	0.641	0.527
0.07	0.728	0.822	0.609
0.08	0.790	1.010	0.677
0.09	0.844	1.203	0.731
0.10	0.892	1.399	0.775
0.12	0.971	1.796	0.840
0.14	1.033	2.196	0.882
0.16	1.084	2.596	0.912
0.18	1.126	2.995	0.932
0.20	1.160	3.393	0.947

B3^{2.25}

Для обычного волновода найдите v , w и $\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$ для каждого из указанных значений a .

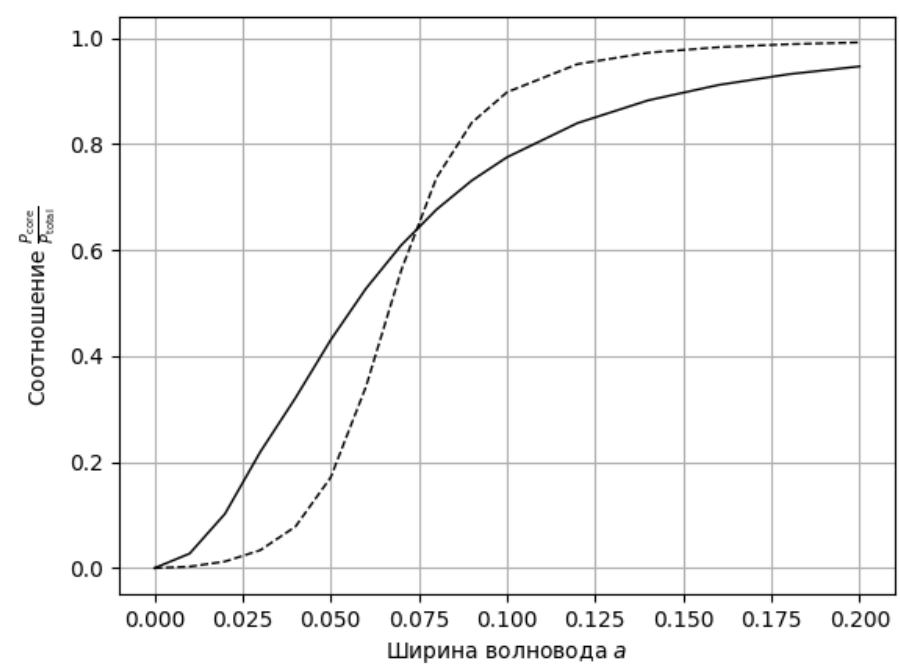
Ответ:

a	v	w	$\frac{P_{\text{core}}}{P_{\text{total}}}$
0.01	0.196	0.007	0.003
0.02	0.392	0.030	0.012
0.03	0.585	0.072	0.034
0.04	0.774	0.141	0.078
0.05	0.951	0.249	0.171
0.06	1.106	0.411	0.342
0.07	1.223	0.631	0.562
0.08	1.302	0.883	0.737
0.09	1.353	1.141	0.840
0.10	1.387	1.393	0.898

a	v	w	$\frac{P_{core}}{P_{total}}$
0.12	1.429	1.877	0.951
0.14	1.455	2.336	0.972
0.16	1.472	2.780	0.983
0.18	1.485	3.212	0.988
0.20	1.494	3.637	0.992

B4 ^{0.90} Постройте на одном листе графики $\frac{P_{core}}{P_{total}}(a)$ для обычного и анизотропного волноводов.

Ответ:



B5 ^{0.20} Найдите, во сколько раз мощность, переносимая сердцевинной анизотропного волновода, превосходит мощность, переносимую сердцевинной обычного, при ширине волновода $a = 0.05$.

Ответ:

$$N = 2.515$$

B6 ^{0.20} Оцените, при каком a_{cr} анизотропный волновод начнёт проигрывать обычному по доле переносимой сердцевинной энергии.

Значение находится приближённо из графика, построенного в **B4**.

Ответ:

$$a_{cr} = 0.074$$