

A1 0.20 Запишите уравнение колебаний бруска без учета трения и внешних сил в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0.$$

Укажите численные значения частоты свободных гармонических колебаний малой амплитуды ω_0 и параметра нелинейности ε .

Уравнение колебаний

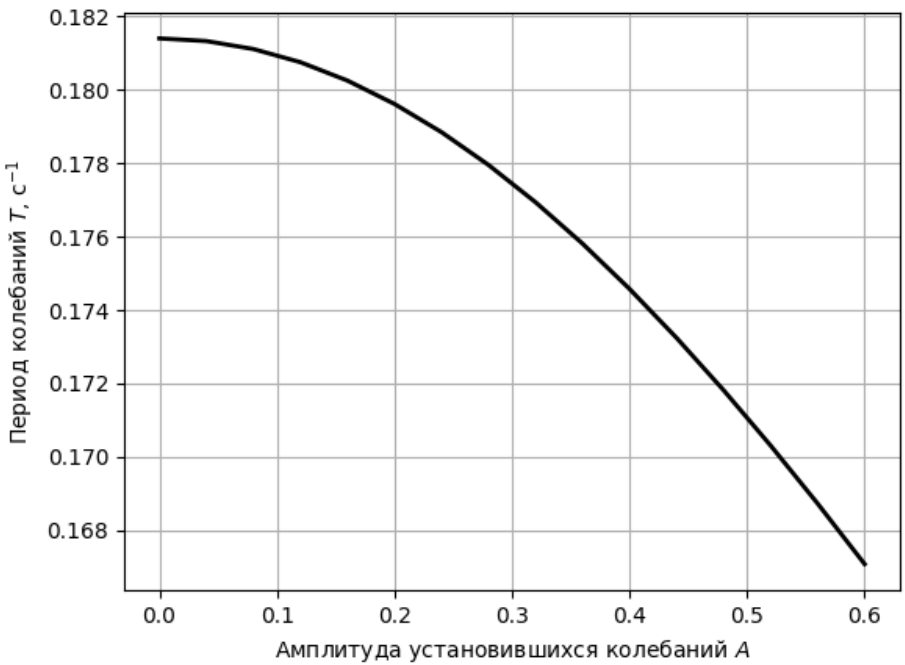
$$I\ddot{x} = -k_1 x - k_3 x^3$$

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{I}} = 34.64 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = \frac{k_3}{I} = 800 \text{ с}^{-2}.$$

A2 1.00 Снимите зависимость периода от амплитуды колебаний $T(A)$. Опишите методику (какие начальные условия и времена использовали, по каким формулам определяли период). Исследуйте диапазон амплитуд, при которых период меняется не более чем на 10%. Проведите не менее 15 измерений при различных значениях амплитуды.

Ответ:



Зададим в качестве начального условия $x_0 = A$, $v_0 = 0$, тогда амплитуда колебаний будет равна A . Период колебаний можно определить, измерив положение одного из следующих максимумов или нулей зависимости $x(t)$. График зависимости периода от амплитуды приведен выше.

A3 0.80 При достаточно малых амплитудах зависимость периода от амплитуды имеет вид

$$T = T_0(1 + \alpha A^n).$$

Здесь T_0 – период колебаний малой амплитуды. Определите из ваших данных параметры α , n .

Построим график зависимости $\ln((T_0 - T)/T_0)$ от $\ln A$. Из него найдем

Ответ: $n \approx 2, \alpha \approx 0.25$

Заметим, что квадратичная зависимость периода от амплитуды работает тем точнее, чем меньше амплитуда. Если использовать слишком большие амплитуды, эффективное значение показателя степени окажется меньше.

A4 1.50 При достаточно малой амплитуде колебаний зависимость угла от времени имеет вид

$$x = a \cos \omega t + b \cos 3\omega t.$$

Исследуйте зависимость амплитуды гармоники утроенной частоты b от амплитуды колебаний A . Исследуйте ту же область амплитуд $A < 0.5$ и определите как можно точнее значение b для 5 различных амплитуд.

\textit{Примечание:} Исследуемый эффект достаточно мал. Убедитесь, что вы проводите вычисления и измерения с достаточной точностью, чтобы его качественно наблюдать. При необходимости вы можете уменьшить шаг по времени для численного решения.

Используя формулу $\cos 3\omega t = 4 \cos^3 \omega t - 3 \cos \omega t$, представим зависимость координаты от времени в виде

$$x = (a - 3b) \cos \omega t + 4b \cos^3 \omega t.$$

Таким образом, зависимость $x / \cos \omega t$ от $\cos^2 \omega t$ линейна, причем коэффициент наклона графика равен $4b$. Для линеаризации нужно точно знать значение частоты колебаний при данной амплитуде $A = a + b$. При этом можно считать $b \ll a$, поэтому $a \approx A$. Для амплитуд $A = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$. точно измеряем несколько точек на первой четверти периода зависимости $x(t)$ и получаем отсюда значения b .

Ответ:

A	b
0,1	0,0000205
0,2	0,000163
0,3	0,000537
0,4	0,00123
0,5	0,00231

A5 0.50

Известно, что при малых амплитудах $b = \beta A^3$. Определите по вашим данным коэффициент β .

Построим график найденной в прошлом пункте зависимости в координатах, в которых она линейна (например b от A^3). Отсюда найдем $\beta = 0.019$.

Для сравнения теоретическое значение $\beta = \varepsilon / 32 \omega_0^2 \approx 0.0208$. Отличие связано в первую очередь с тем, что при конечных амплитудах нужно учитывать поправки высшего порядка, которые при $A = 0.5$ уже не совсем пренебрежимы.

Ответ:

$$\beta = 0.019$$

B1 1.00

Как можно точнее определите значения ω_0 , ε , γ .

Значение $\omega_0 = 2\pi / T_0$ можно найти, измерив период свободных колебаний (положив величину внешнего момента равной нулю), а коэффициента γ – по затуханию колебаний (нужно выбрать амплитуду колебаний так, чтобы их можно было считать линейными). Амплитуда колебаний зависит от времени как $A = A_0 e^{-\gamma t}$, $\gamma = -\frac{1}{t} \ln \frac{A}{A_0}$.

Для определения коэффициента перед нелинейным слагаемым приложим силу нулевой частоты (то есть постоянную) и найдем установившееся значение смещения A . Тогда $\varepsilon = \frac{f - \omega_0 A}{A^3}$.

Ответ:

$$\omega_0 = 26.3 \text{ с}^{-1}; \quad \gamma = 0.85 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = 360 \text{ с}^{-2}.$$

B2 1.50

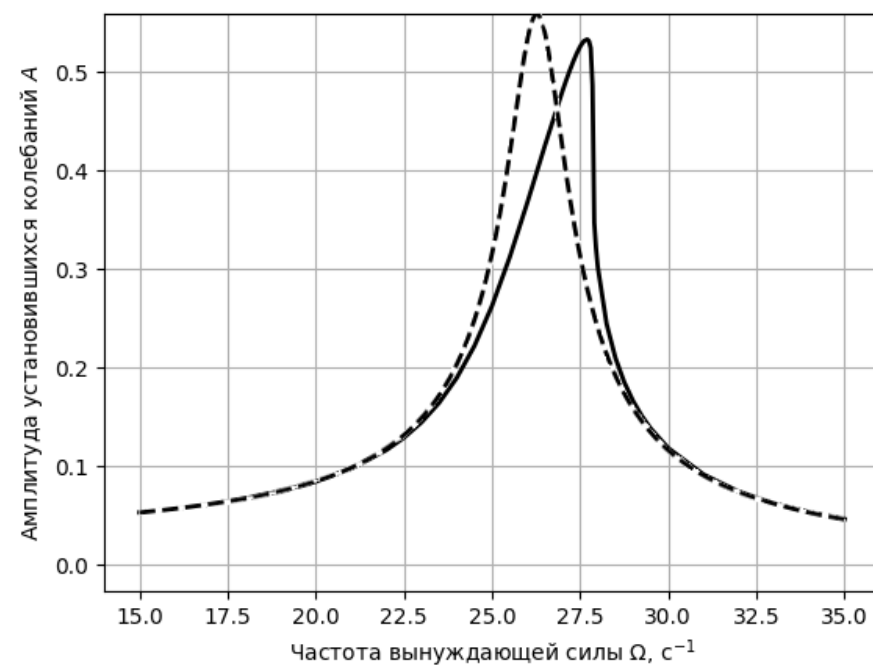
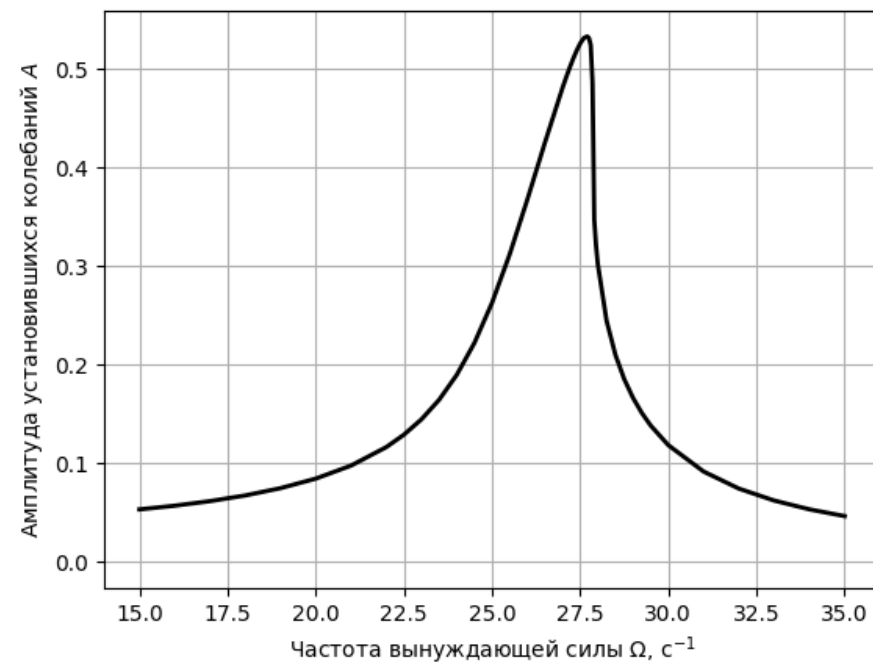
Выберем значение $f = 25 \text{ с}^{-2}$. Постройте графики зависимости амплитуды колебаний и сдвига фаз от частоты. Для сравнения на тех же графиках постройте аналогичные теоретические зависимости без учета нелинейности.

Будем задавать различные значения частоты внешнего момента и измерять отвечающие им значения амплитуды колебаний и фазы. Измерить амплитуду можно непосредственно. Для измерения фазы точно определим положения нескольких максимумов по времени t_n . Зависимость смещения от времени имеет вид

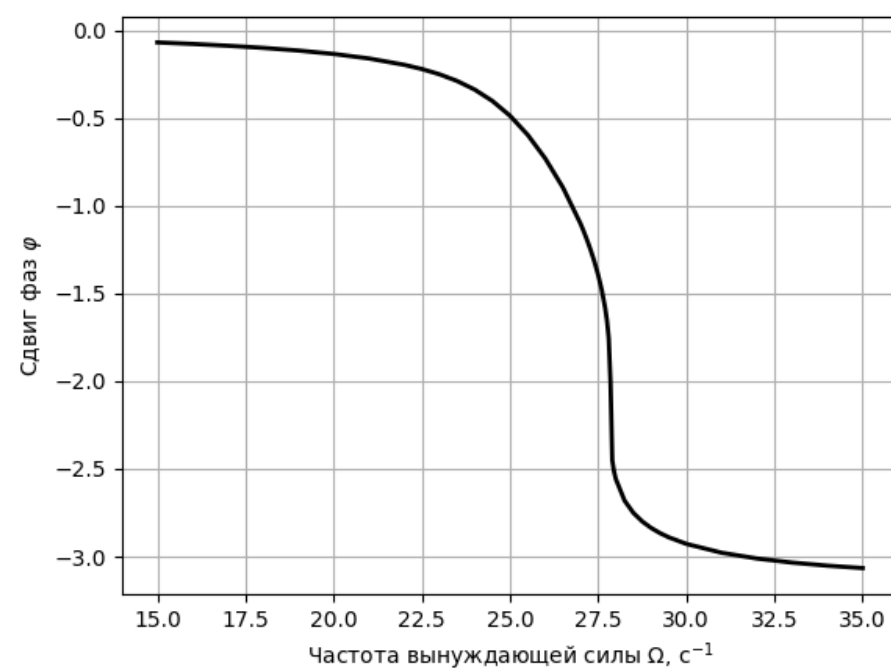
$$x = A \cos \omega(t - t_n),$$

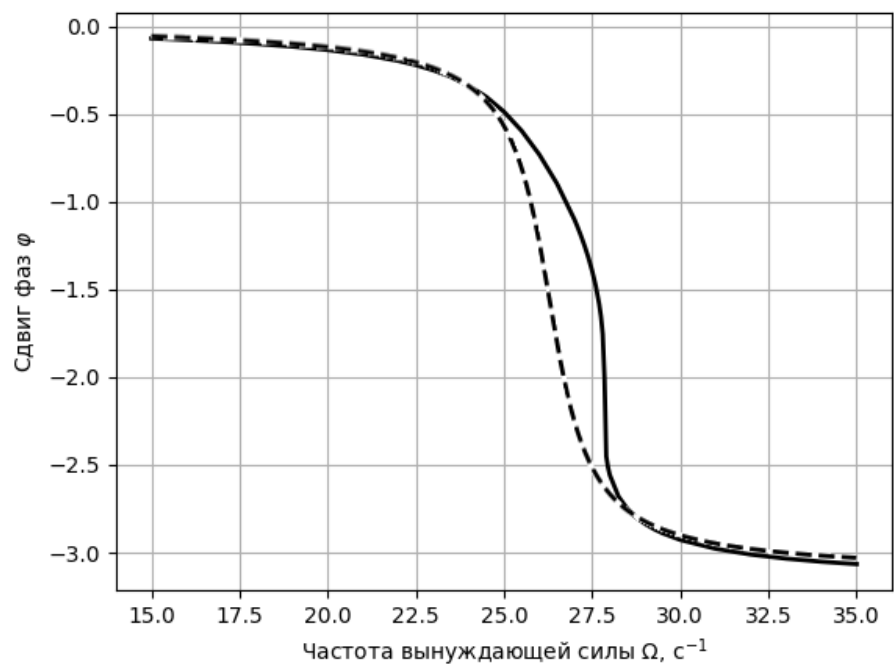
поэтому фаза колебаний равна $\varphi = -\omega t_n$. Вычитая отсюда целое кратное 2π можно получить фазу в указанном в условии диапазоне. Строим графики полученных зависимостей и видим, что из-за нелинейности положение резонансного максимума сместилось в область больших частот, а его форма деформировалась.

Ответ:



Ответ:

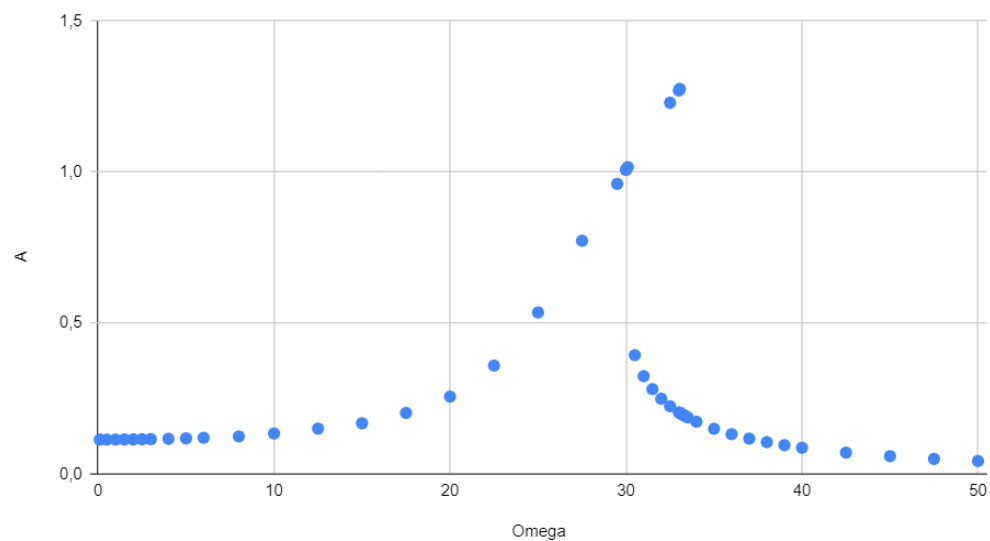




B3 1.00 Выберите значение $f = 80 \text{ с}^{-2}$. Постройте график зависимости амплитуды результирующих колебаний от частоты. Укажите область частот, в которой наблюдается гистерезис (то есть два значения амплитуды при одной и той же частоте).

Аналогично предыдущему пункту измеряем зависимость амплитуды от частоты. Если идти в сторону увеличения частоты колебаний (и использовать большое значение x_0), можно заметить, что при некоторой частоте амплитуда изменяется скачком. Если же идти со стороны больших частот и использовать маленькие начальные x_0 , то амплитуда при некоторой частоте увеличится скачком. При этом будет область частот, в которой в зависимости от начальных условий будет два возможных значения амплитуды. При значении f из условия эта область примерно $\Omega \in [30.5, 33] \text{ с}^{-1}$.

Ответ:



Ответ: Область гистерезиса
 $\Omega \in [30.5, 33] \text{ с}^{-1}$

C1 1.00 Наиболее быстрый рост амплитуды колебаний наблюдается при частоте $\Omega \approx 2\omega_0$.

Определим отклонение от резонансной частоты $\delta = \Omega - 2\omega_0$.

Амплитуда колебаний будет возрастать, если δ не слишком велико.

На плоскости δ, μ изобразите область, где амплитуда колебаний растет.

Рассматривайте область $\mu \ll 1, \delta \ll \omega_0$.

Будем задавать различные значения δ (а значит и Ω) и μ . В области вблизи резонанса хорошо виден экспоненциальный рост амплитуды, а при больших отклонениях по частоте амплитуда периодически меняется.

Для каждого значения μ можно подобрать соответствующую граничную частоту и таким образом построить границу области резонанса.

Ответ: Область, ограниченная двумя прямыми $\delta = \pm \mu \omega_0 / 2$.

C2 0.50 Определите уравнение для границы области $\delta(\mu)$. Запишите уравнение и найдите его параметры.

Из рисунка в предыдущем пункте видно, что граница имеет вид двух прямых. Измерив на этих прямых координаты нескольких точек, найдем их уравнения.

Ответ:

$$\delta = \pm(\omega_0/2)\mu = \pm 10\mu$$

СЗ 1.50

В области параметрического резонанса зависимость амплитуды от времени имеет вид $A \sim e^{st}$. Определите зависимость параметра s от относительного изменения частоты μ и отстройки по частоте δ . Используя численные данные, найдите форму зависимости $s(\mu, \delta)$ и определите ее параметры.

Подсказка: может быть полезным изучить зависимость $s(\mu)$ при постоянной частоте δ для нескольких значений δ . При этом зависимость s^2 от μ^2 имеет очень простой вид.

При нескольких значениях δ построим графики зависимости s^2 от μ^2 . Видим, что эти зависимости линейны, причем коэффициенты наклона графиков одинаковы (и равны $\omega_0^2/4 = 100 \text{ с}^{-1}$), а постоянный член равен $-\delta^2$.

Ответ:

$$s = \sqrt{\omega_0^2 \mu^2 / 4 - \delta^2} = \sqrt{100 \mu^2 - \delta^2}$$

С4 1.00

Амплитуда колебаний растет также и вблизи области $\Omega \approx \omega_0$, при достаточно малых $\delta = \Omega - \omega_0$. Найдите границы области, при которой возможен рост амплитуды $\delta(\mu)$. Изобразите эту область на плоскости δ, μ . Определите уравнение этой границы. (Подсказка: зависимость $\delta(\mu)$ имеет степенной вид.)

Аналогично части С1 наблюдаем, что есть область, в которой амплитуда колебаний экспоненциально растет. Границы этой области теперь не прямые. Измерив на них координаты несколько точек убеждаемся, что границы – параболы. Их уравнения имеют вид $\delta = \mu^2 \omega_0 / 32$ и $\delta = -5\mu^2 \omega_0 / 32$

Ответ: Область, ограниченная двумя параболой.

С5 0.50

Пусть $\gamma = 0.2 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 450 \text{ с}^{-2}$. Нарисуйте на плоскости $\mu, \delta = \Omega - 2\omega_0$ область, в которой амплитуда колебаний растет. Для $\delta = 0$ и $\mu = 0.05$ найдите амплитуду установившихся колебаний, а также время оцените время, за которое они устанавливаются.

Амплитуда будет расти, если скорость роста за счет модуляции частоты будет выше скорости затухания за счет трения, то есть $s > \gamma$. Значит эта область ограничена гиперболой

$$\mu^2 \omega_0^2 / 4 - \delta^2 > \gamma^2.$$

Это можно понять из результата пункта СЗ или наблюдать численно.

Рост амплитуды колебаний наблюдается, только если начальная амплитуда достаточно мала. При заданных в условии параметрах устанавливается значение установившейся амплитуды колебаний $A \approx 0.13$ за время $t \approx 50 \text{ с}$ (точное время зависит от начальных условий).

Ответ:

$$A \approx 0.13; \quad t \approx 50 \text{ с}.$$

D1 1.00

В случае $\gamma = \omega_0/2$ найдите минимальное значение f_0 , при котором возможно такое движение. (Начальный угол отклонения и начальную угловую скорость маятника считайте равными нулю.)

При $f - f_0 \ll f_0$ зависимость средней угловой скорости от приложенного момента имеет вид $\langle \omega \rangle \sim (f - f_0)^\alpha$. Найдите значение постоянной α .

Увеличивая значение f заметим, что линейный рост угла отклонения начинается с $f_0 = 400 \text{ с}^{-2}$. (Можно и теоретически показать, что рост начинается с $f_0 = \omega_0^2$.)

Снимем зависимость средней частоты от f вблизи порогового значения f_0 .

Заметим, что угловая скорость скачком приобретает конечное значение $\langle \omega \rangle \approx 10 \text{ с}^{-1}$ и достаточно слабо зависит от приложенной силы. Поэтому показатель степени $\alpha \approx 0$

Ответ:

$$f_0 = 400 \text{ с}^{-2}; \quad \alpha \approx 0.$$