



В обычной жизни нам кажется, что лучи света в окружающей нас атмосфере движутся прямолинейно. Однако это не так, и эффекты искривления лучей незаметны лишь потому, что коэффициент преломления воздуха практически неотличим от единицы. На больших масштабах и при возникновении некоторых атмосферных явлений ей уже нельзя будет пренебречь. В атмосфере Земли примером таких явлений может служить мираж, а в атмосферах других планет – к примеру, Венеры, – практически неограниченное расстояние до горизонта. В этой задаче мы подробно рассмотрим каждое из этих явлений.

Часть А. Миражи (5.8 балла).

Миражи возникают при большом перепаде температур между поверхностью земли и атмосферой. Одним из их многочисленных примеров являются Курильские острова, миражи которых можно наблюдать в Кунаширском проливе в Японии по весне из-за охлаждения воздуха над морем.

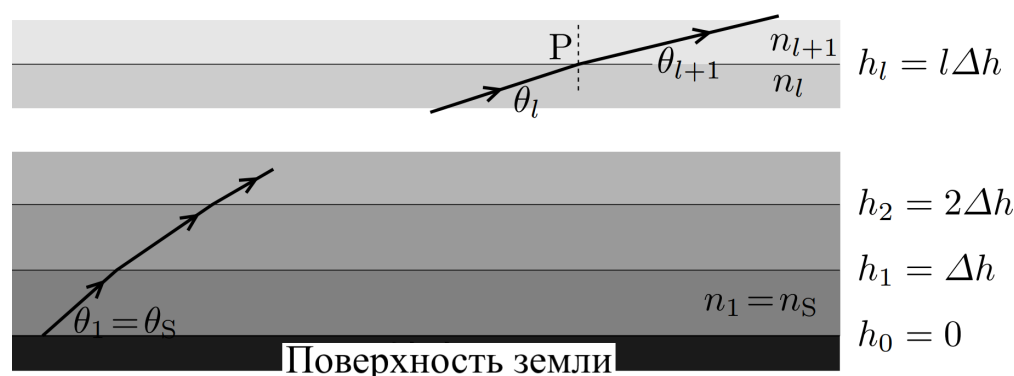
Атмосферу можно считать идеальным газом, состоящим из одинаковых молекул массой m . Известно, что для большинства газов, в том числе и газа в атмосфере, применима следующая формула для зависимости показателя преломления n атмосферного воздуха:

$$n^2 - 1 = \alpha N,$$

где N – концентрация молекул, а α – коэффициент, зависящий от природы газа.

При решении задачи считайте, что поверхность воды горизонтальна. Температура атмосферы T повышается с увеличением высоты h над уровнем моря, меняется также и показатель преломления воздуха. Влиянием гравитации пренебрегите, считая атмосферное давление равным $p_0 = 1$ атм вне зависимости от высоты. Показатель преломления атмосферы при нормальных условиях ($T_0 = 273$ К, $p_0 = 1$ атм) равен $n = 1.00028$. Считайте, что температура и показатель преломления зависят только от h . Рассмотрим закон Снеллиуса для лучей, испускаемым под углом θ_S с поверхности земли.

Разделим атмосферу на тонкие слои толщиной Δh , как показано на рисунке 1. Будем считать, что показатель преломления атмосферы на высоте от $\Delta h(l-1)$ до $\Delta h l$ постоянен и равен n_l , а угол между лучом света и горизонтом на этой высоте θ_l , где $l = 1, 2, 3, \dots$. Показатель преломления атмосферы на поверхности равен $n_1 = n_S$.



A1 0.40 Запишите закон Снеллиуса для точки P , находящейся на высоте $l\Delta h$. Совершив предельный переход $\Delta h \rightarrow 0$, $\Delta h l \rightarrow h$, $\theta_l \rightarrow \theta(h)$, $n_l \rightarrow n(h)$, получите выражение для $\theta(h)$.

Предположим, что температура $T(h)$ возрастает линейно с h в диапазоне $0 \leq h \leq H$ и постоянна при $h > H$:

$$T(h) = \begin{cases} T_S + (T_H - T_S) \frac{h}{H} & 0 \leq h \leq H \\ T_H & H < h \end{cases},$$

где $T_S = T(0) < T_H = T(H)$.

Учитывая, что $\frac{T_H - T_S}{T_S} \ll 1$, зависимость концентрации $N(h)$ на высоте h ($0 < h < H$) при этом можно также с хорошей точностью считать линейной, т.е.:

$$\frac{N(h)}{N_S} = 1 - \frac{N_S - N_H}{N_S} \frac{h}{H},$$

где $N_S = N(0)$, $N_H = N(H)$.

A2 0.50 Пользуясь этим результатом, найдите, как зависит показатель преломления $n(h)$ атмосферы от высоты. Выразите ответ через $n_S = n(0)$ и $n_H = n(H)$.

Рассмотрим траекторию луча, испущенного под углом θ_S к горизонту. Будем считать, что по достижении верхней точки траектории $h_m (\leq H)$ луч начинает двигаться обратно вниз. Направим ось x горизонтально в плоскости распространения луча, тогда его траектория $h(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{dh}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1},$$

причём знак $+$ соответствует подъёму, а $-$ – опусканию луча.

A3 0.50 Выразите показатель преломления $n_m \equiv n(h_m)$ в верхней точке траектории луча через n_S и θ_S .

С учётом сказанного выше, уравнение для определения траектории луча можно записать в виде

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{a \left(1 - \frac{h}{b} \right)}, \quad a = a_m \frac{h_m}{H}.$$

A4 1.00 Выразите a_m и b через h_m , n_H , n_S и n_m .

Известно, что решение этого уравнения для луча, проходящего через начало координат $(x, h) = (0, 0)$, представляет собой параболу

$$h = cx + dx^2.$$

A5 0.50 Выразите коэффициенты c и d через a и b .

Пусть даны численные значения $T_S = 275 \text{ K}$, $T_H = 290 \text{ K}$, $H = 20 \text{ м}$. Наблюдатель находится на японском берегу ($h = 0$) и наблюдает Курильские острова над поверхностью воды.

Пусть расстояние до островов равно L . Наблюдатель видит их под тем же углом, под которым видел бы острова, находиись они на том же расстоянии на высоте h_g над поверхностью воды.

- A6^{1.60}

Выразите h_g как функцию расстояния L от наблюдателя до острова. Выше или ниже остальных виден самый дальний из наблюдаемых островов?
- A7^{0.80}

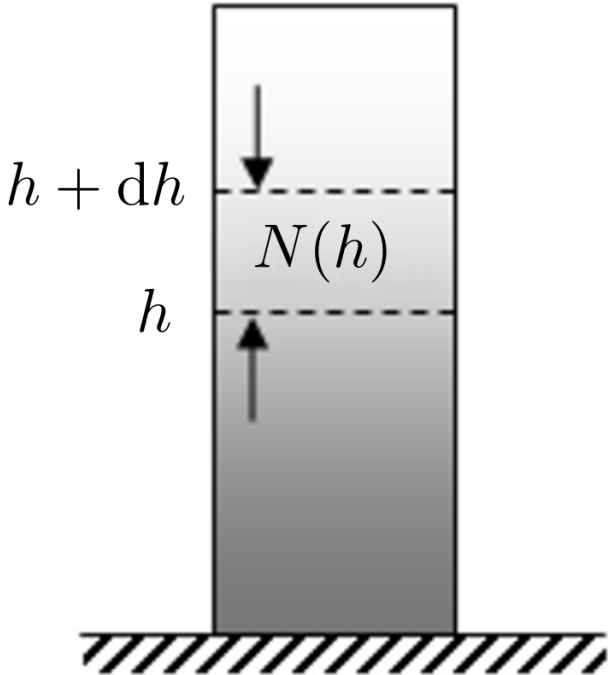
Выразите через n_S , n_H и H максимальное расстояние $L_{\max}$ до острова, который ещё может видеть наблюдатель. Чему при этом равен угол $\theta_{S\max}$?
- A8^{0.50}

Вычислите $L_{\max}$ и θ_S с точностью до двух значащих цифр.

Часть В. Кривизна лучей света (4.2 балла).

В части **A** показатель преломления атмосферы рассчитывался без учёта влияния силы тяжести и с учётом изменения температуры только у поверхности земли. По мере увеличения высоты над поверхностью температура, конечно, снижается, но наибольшее влияние на концентрацию атмосферы оказывает именно гравитация. Поэтому в дальнейшем для простоты будем считать температуру атмосферы T всюду постоянной и рассматривать изменение показателя преломления только за счёт силы тяжести. Ускорение свободного падения равно g .

Рассмотрим баланс сил, действующих на участок атмосферы в области высот от h до $h + dh$, как показано на рисунке 2. Концентрацию молекул воздуха обозначим как $N(h)$.

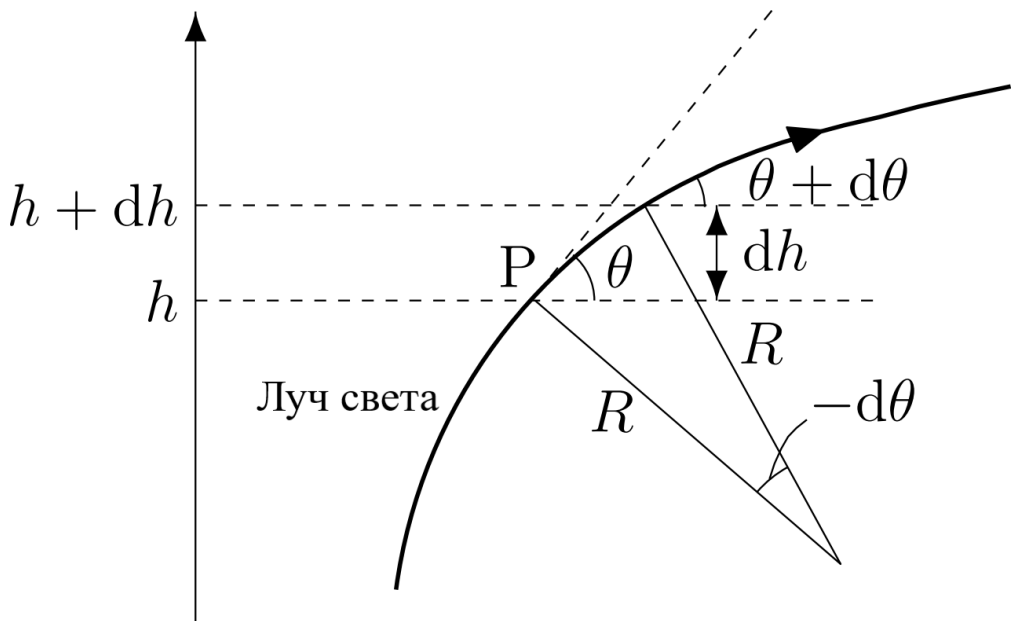


- B1^{0.80}

Найдите зависимость $N(h)$, если концентрация у поверхности земли $N(0) = N_0$.

Как и в части **A**, будем считать, что показатель преломления на высоте h равен $n(h)$, а угол с горизонтом, под которым луч движется на высоте h , обозначим как $\theta(h)$. Кривизной земной поверхности можно пренебречь.

Траектория луча в атмосфере представляет собой кривую, которую в каждой точке можно приблизить участком окружности радиуса R . Это значение R называется радиусом кривизны траектории луча в этой точке (см. рисунок 3).



- B2^{1.00}

Выразите $\frac{1}{R}$ через $\theta(h)$ и $\frac{d\theta}{dh}$.
- B3^{0.50}

Преобразуйте полученное в **B2** выражение с помощью закона Снеллиуса из **A1** так, чтобы оно содержало только n , n_S и θ_S .
- B4^{0.90}

Найдите, чему равен вблизи земной поверхности радиус кривизны R траектории луча, распространяющегося под малым углом к горизонту. Выразите ответ через m , g , n_S , T и k_B .

Учтём теперь кривизну Земли. Её радиус $R_E = 6.4 \cdot 10^3 \text{ км}$. Остальные численные значения $m = 29 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, $T = 300 \text{ K}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

- B5^{0.50}

Найдите численно радиус кривизны траектории луча R_E^{lr} , исходящего горизонтально из некоторой точки на поверхности земли. Увеличивается ли в дальнейшем высота луча над поверхностью?

Атмосфера Венеры состоит из CO_2 , который можно считать идеальным и для которого можно применить все полученные выше результаты. Атмосферное давление на поверхности Венеры $p_V = 93$ атм ($1 \text{ атм} = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Па}$), а температура $T_V = 740 \text{ К}$. Радиус Венеры $R_V = 6.0 \cdot 10^3 \text{ км}$, ускорение свободного падения на её поверхности $g_V = 8.9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, масса молекулы CO_2 $m_C = 44 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Для показателя преломления на Венере справедливо уравнение:

$$n^2 = 1 + \alpha_V N$$

с коэффициентом $\alpha_V = 4\pi a_C^3$, где $a_C = 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – эффективный размер молекулы CO_2 .

B6^{0.50} Найдите численно радиус кривизны траектории луча R_V^{lr} , исходящего горизонтально из некоторой точки непосредственно над поверхностью планеты. Увеличивается ли в дальнейшем высота луча над поверхностью?