

A1 ^{0.40} Запишите закон Снеллиуса для точки P , находящейся на высоте $l\Delta h$. Совершив предельный переход $\Delta h \rightarrow 0$, $\Delta hl \rightarrow h$, $\theta_l \rightarrow \theta(h)$, $n_l \rightarrow n(h)$, получите выражение для $\theta(h)$.

Закон Снеллиуса для точки P :

$$n_l \cos \theta_l = n_{l+1} \cos \theta_{l+1}.$$

Переходя к пределу, получаем закон Снеллиуса для непрерывной среды:

$$n(h) \cos \theta(h) = n_S \cos \theta_S,$$

откуда окончательно получаем:

$$\theta(h) = \arccos\left(\frac{n_S \cos \theta_S}{n(h)}\right).$$

Ответ:

$$n_l \cos \theta_l = n_{l+1} \cos \theta_{l+1}$$

$$\theta(h) = \arccos\left(\frac{n_S \cos \theta_S}{n(h)}\right)$$

A2 ^{0.50} Пользуясь этим результатом, найдите, как зависит показатель преломления $n(h)$ атмосферы от высоты. Выразите ответ через $n_S = n(0)$ и $n_H = n(H)$.

Выразим концентрации воздуха на высотах $h = 0$ и $h = H$:

$$N_S = \frac{1}{\alpha} [n_S^2 - 1], \quad N_H = \frac{1}{\alpha} [n_H^2 - 1].$$

Подставив их в закон зависимости показателя преломления, имеем:

$$n(h) = \sqrt{n_S^2 - (n_S^2 - n_H^2) \frac{h}{H}}.$$

Ответ:

$$n(h) = \sqrt{n_S^2 - (n_S^2 - n_H^2) \frac{h}{H}}$$

A3 ^{0.50} Выразите показатель преломления $n_m \equiv n(h_m)$ в верхней точке траектории луча через n_S и θ_S .

Пишем закон Снеллиуса, учитывая, что в вершине траектории $\theta = 0$:

$$n_S \cos \theta_S = n_m \cos 0 = n_m.$$

Отсюда и из результатов предыдущего пункта имеем:

$$h_m = \frac{n_S^2 \sin^2 \theta_S}{n_S^2 - n_H^2} H.$$

Ответ:

$$n_m = n_S \cos \theta_S$$

$$h_m = \frac{n_S^2 \sin^2 \theta_S}{n_S^2 - n_H^2} H$$

A4 ^{1.00} Выразите a_m и b через h_m , n_H , n_S и n_m .

Подставляем непосредственно:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx} &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{n^2}{n_m^2} - 1} = \sqrt{\left(\frac{n_S^2}{n_m^2} - 1\right) \left(1 - \frac{n_S^2 - n_H^2}{n_S^2 - n_m^2} \frac{h}{H}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{n_S^2 - n_H^2}{n_m^2} \frac{h_m}{H} \left(1 - \frac{h}{h_m}\right)} \implies a_m = \frac{n_S^2 - n_H^2}{n_m^2}, \quad b = h_m.\end{aligned}$$

Ответ:

$$a_m = \frac{n_S^2 - n_H^2}{n_m^2}$$

$$b = h_m$$

A5 ^{0.50} Выразите коэффициенты c и d через a и b .

Подставляем непосредственно:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [cx + dx^2] &= c + 2dx = \sqrt{a \left(1 - \frac{cx + dx^2}{b}\right)} \implies \\ \implies c^2 &= a, \quad 4cd = -\frac{ac}{b} \implies c = \sqrt{a}, \quad d = -\frac{a}{4b}.\end{aligned}$$

Ответ:

$$c = \sqrt{a}$$

$$d = -\frac{a}{4b}$$

A6 ^{1.60} Выразите h_g как функцию расстояния L от наблюдателя до острова. Выше или ниже остальных виден самый дальний из наблюдаемых островов?

Несложно заметить, что:

$$\begin{aligned}L = -\frac{c}{d} &= \frac{4b}{\sqrt{a}} = 4\sqrt{h_m \left(\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2} - h_m\right)} \implies \\ \implies h_m^2 - \frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2} h_m + \frac{L^2}{16} &= 0 \implies \\ \implies h_m &= \frac{H}{2} \left[\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2}\right)^2 - \frac{L^2}{4H^2}} \right].\end{aligned}$$

Так как $L \rightarrow 0$ ($h_m \rightarrow 0$), то следует выбрать корень со знаком "-". Из геометрических свойств параболической траектории

$$h_g = 4h_m,$$

поэтому

$$h_g = 2H \left[\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2} - \sqrt{\left(\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2}\right)^2 - \frac{L^2}{4H^2}} \right].$$

Из этой формулы ясно, что самый дальний из островов будет виден выше остальных.

Ответ: Самый дальний остров виден выше остальных.

$$h_g = 2H \left[\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2} - \sqrt{\left(\frac{n_S^2}{n_S^2 - n_H^2}\right)^2 - \frac{L^2}{4H^2}} \right]$$

A7 ^{0.80} Выразите через n_S , n_H и H максимальное расстояние $L_{\max}$ до острова, который ещё может видеть наблюдатель. Чему при этом равен угол $\theta_{S\max}$?

Ясно, что максимальному расстоянию соответствует случай $h_m = H$, откуда, подставляя в одно из выражений предыдущего пункта,

$$L_{\max} = \frac{4Hn_H}{\sqrt{n_S^2 - n_H^2}}.$$

Из закона Снеллиуса:

$$\theta_{S\max} = \arccos \frac{n_H}{n_S}.$$

Ответ:

$$L_{\max} = \frac{4Hn_H}{\sqrt{n_S^2 - n_H^2}}$$

$$\theta_{S\max} = \arccos \frac{n_H}{n_S}$$

A8 0.50

Вычислите $L_{\max}$ и θ_S с точностью до двух значащих цифр.

Найдём для нормальных условий:

$$\begin{aligned} \frac{p_0\alpha}{k_{\text{B}}} &= \frac{n_0^2 - 1}{T_0} \implies \\ \implies n_S^2 &= 1 + (n_0^2 - 1)\frac{T_0}{T_S}, \quad n_H^2 = 1 + (n_0^2 - 1)\frac{T_0}{T_H} \implies \\ \implies L_{\max} &= 14.4 \text{ км}, \quad \theta_S = 0.31^\circ. \end{aligned}$$

Ответ:

$$L_{\max} = 14.4 \text{ км}$$

$$\theta_S = 0.45^\circ$$

B1 0.80

Найдите зависимость $N(h)$, если концентрация у поверхности земли $N(0) = N_0$.

Рассматривая баланс сил, действующих на участок атмосферы на высоте от h до $h + \mathrm{d}h$, получим:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\rho g.$$

Поскольку воздух можно считать идеальным газом, то из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\rho = \frac{mp}{k_{\text{B}}T},$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{mg}{k_{\text{B}}T}p \implies \frac{p(h)}{p(0)} = e^{-\frac{mgh}{k_{\text{B}}T}} \implies N(h) = N_0e^{-\frac{mgh}{RT}}.$$

Ответ:

$$N(h) = N_0e^{-\frac{mgh}{RT}}$$

B2 1.00

Выразите $\frac{1}{R}$ через $\theta(h)$ и $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h}$.

Для элемента длины траектории луча $\mathrm{d}l$, с одной стороны,

$$\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}h}{\sin \theta},$$

а с другой стороны,

$$\mathrm{d}l = -R \, \mathrm{d}\theta,$$

откуда

$$\frac{1}{R} = -\sin \theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{R} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dh}$$

B3^{0.50}

Преобразуйте полученное в **B2** выражение с помощью закона Снеллиуса из **A1** так, чтобы оно содержало только n , n_S и θ_S .

Из закона Снеллиуса

$$\cos\theta = \frac{n_S \cos\theta_S}{n},$$

тогда

$$\frac{1}{R} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dh} = \frac{d(\cos\theta)}{dh} = n_S \cos\theta_S \frac{d}{dh} \left[\frac{1}{n} \right] = -\frac{n_S \cos\theta_S}{n^2} \frac{dn}{dh}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{R} = -\frac{n_S \cos\theta_S}{n^2} \frac{dn}{dh}$$

B4^{0.90}

Найдите, чему равен вблизи земной поверхности радиус кривизны R траектории луча, распространяющегося под малым углом к горизонту. Выразите ответ через m , g , n_S , T и k_B .

Находим непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= -\frac{1}{n_E} \frac{dn}{dh} = -\frac{n_E^2 - 1}{2n_E^2} \frac{d}{dh} \left[e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \right] \Big|_{h=0} = (1 - n_E^{-2}) \frac{mg}{2k_B T} \implies \\ &\implies R = \frac{2k_B T}{(1 - n_E^{-2}) mg}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$R = \frac{2k_B T}{(1 - n_E^{-2}) mg}$$

B5^{0.50}

Найдите численно радиус кривизны траектории луча R_E^{lr} , исходящего горизонтально из некоторой точки на поверхности земли. Увеличивается ли в дальнейшем высота луча над поверхностью?

Подставляем численные значения:

$$R_E^{lr} = \frac{2k_B T}{(1 - n_E^{-2}) mg} = 31.4 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Высота луча над поверхностью увеличивается, поскольку $R_E^{lr} > R_E$.

Ответ: Высота луча над поверхностью увеличивается.

$$R_E^{lr} = 31.4 \cdot 10^3 \text{ км}$$

B6^{0.50}

Найдите численно радиус кривизны траектории луча R_V^{lr} , исходящего горизонтально из некоторой точки непосредственно над поверхности планеты. Увеличивается ли в дальнейшем высота луча над поверхностью?

Найдём сначала показатель преломления n_V на поверхности Венеры:

$$n_V^2 = 1 + \frac{4\pi a_C^3 p_V}{k_B T_V} = 1.0314,$$

тогда по уже известной формуле

$$R_V^{lr} = \frac{2k_B T_V}{(1 - n_V^{-2}) m_C g_V} = 1.00 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Высота луча над поверхностью уменьшается, поскольку $R_V^{lr} < R_V$.

Ответ: Высота луча над поверхностью уменьшается.

$$R_V^{lr} = 1.00 \cdot 10^3 \text{ км}$$