

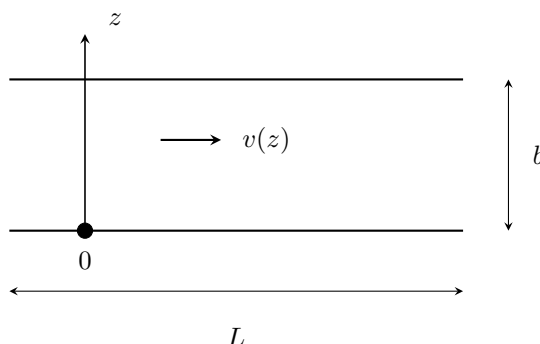
Road to IPhO

Микрофлюидика

В 90-х годах прошлого века была разработана технология, позволяющая создавать и управлять крайне малыми потоками жидкости, заключенными в ограниченном пространстве (характерные размеры меньше миллиметра). Эта технология называется микрофлюидика. С ее помощью, в частности, можно построить лабораторию-на-чипе (lab-on-chip), где в системах капилляров можно смешивать и разделять реагенты, воздействовать на разные части чипа температурой, током и другими параметрами. В итоге это позволяет использовать реагенты в очень малых количествах, что существенно удешевляет процессы разработки, особенно в химии современных лекарств.

Часть А. Течение в капилляре под действием разности давлений (2 балла)

Настоящие капилляры имеют круглое или квадратное/прямоугольное сечение. Однако в этой задаче для простоты расчетов будем рассматривать прямоугольный капилляр с поперечными размерами a и b ($a \gg b$) и длины L ($L \gg a$). Такой капилляр заполнен водой, и к его концам приложена разность давлений ΔP .



A1 Пусть в капилляре имеется установившееся ламинарное течение воды. Найдите зависимость скорости течения жидкости $v(z)$ в капилляре от координаты z при установившемся ламинарном течении воды в капилляре. Ось z направлена вдоль стороны b , начало координат находится на одной из стенок капилляра. Выразите ответ через ΔP , параметры капилляра и вязкость жидкости η . **1.0**

A2 В некоторый момент в начальное сечение капилляра AA' равномерно впрыскивается реагент. На рисунке жирные горизонтальные линии обозначают стенки капилляра. В листе ответов нарисуйте, где будет находиться реагент через $\tau = 5$ с. Для рисунка выберите подходящий масштаб по горизонтальной оси, которая направлена вдоль течения жидкости. **1.0**
Параметры капилляра: $L = 8$ мм, $b = 0.2$ мм, разность давлений $\Delta P = 1.5$ Па, $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па·с. Диффузией реагента пренебрегите.

Часть В. Взаимодействие электролита и стенки капилляра (4 балла)

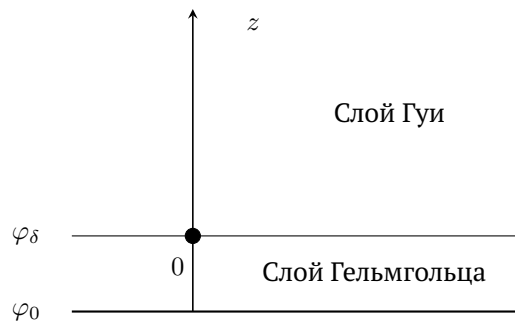
Электролит — вещество, которое проводит электрический ток вследствие диссоциации на ионы, что происходит в растворах. При контакте двух фаз, одна из которых жидкая, возникает двойной электрический слой (ДЭС) — слой ионов, образующийся на поверхности твердого тела в результате адсорбции ионов из раствора, диссоциации поверхностного соединения или ориентирования полярных молекул на границе раздела фаз. Согласно современной теории структуру ДЭС составляют два слоя:

- Слой Гельмгольца или адсорбционный слой, примыкающий непосредственно к межфазной поверхности (неподвижный);
- Слой Гуи или диффузный слой, в котором находятся ионы электролита обоих знаков.

Электрической характеристикой двойного электрического слоя является потенциал, и в этой части задачи нужно найти его характерный вид вблизи одной плоской поверхности стенки капилляра в присутствии электролита. Будем считать, что сам электролит электрически нейтрален, а катионы и анионы имеют заряды $+e$ и $-e$ соответственно. Концентрация ионов каждого из типов вдали от стенок равна n_0 . Диэлектрическая проницаемость электролита — ε , его вязкость — η .

Пусть потенциал в объеме электролита равен нулю. Приложим к стенке капилляра некоторый потенциал φ_0 . Из-за эффектов, происходящих в слое Гельмгольца, потенциал на границе этого слоя станет φ_δ .

Road to IPhO



Мы не будем в дальнейшем рассматривать процессы, происходящие в слое Гельмгольца, поэтому можно считать, что потенциал у границы капилляра равен φ_δ .

Ось z направим перпендикулярно границе капилляра, начало координат находится на границе.

Ионы электролита движутся под действием поля в вязкой среде. Силу сопротивления считайте пропорциональной скорости $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

- B1** Найдите установившуюся скорость ионов $v_z(z)$ на расстоянии z от границы капилляра. Считайте, что перемещение иона за время установления скорости мало. Ответ выразите через заряд иона q ($q = \pm e$), α и потенциал $\varphi(z)$ (и его производные). **0.5**

В равновесном состоянии поток ионов, вызванный полем, должен быть уравновешен обратным потоком, связанным с разностью концентраций (диффузия), так что полный поток равен нулю. Диффузионный поток описывается законом Фика:

$$j = -D \frac{dn}{dz},$$

где j – количество частиц, пересекающих единичную площадку в единицу времени, n – концентрация, D – коэффициент диффузии, который для приведенной модели вязкой среды, описывается законом Эйнштейна-Смулоховского $D = kT/\alpha$ (α – тот же коэффициент, что и в силе сопротивления, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура).

- B2** Выразите концентрации катионов (n_+) и анионов (n_-) вблизи стенки капилляра через потенциал в этой точке, а также через n_0 , e , α , k , T . **1.5**

- B3** Выразите объемную плотность нескомпенсированного заряда $\rho(z)$ вблизи стенки капилляра через потенциал $\varphi(z)$, концентрацию ионов n_0 и физические постоянные e , k , T . Считая, что приложенный к стенке потенциал мал ($e\varphi_0 \ll kT$), получите приближенное значение $\rho(z)$. **0.5**

Во всех следующих пунктах также всегда используйте приближение $e\varphi \ll kT$.

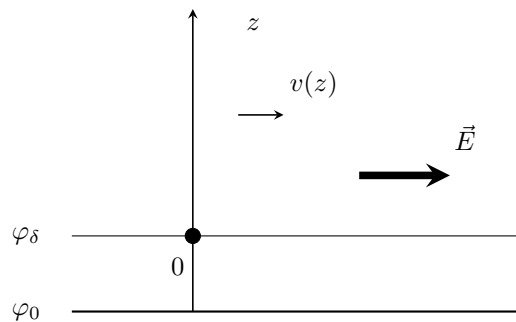
- B4** Найдите зависимость потенциала $\varphi(z)$ от координаты вблизи стенки капилляра в диффузном слое. Помните, что на границе потенциал равен φ_δ . Выразите ответ через n_0 , φ_δ , T , физические постоянные и параметры электролита. **1.0**

- B5** Найдите расстояние λ (формулу и численное значение), на котором потенциал $\varphi(z)$ уменьшается в e раз. Эта длина считается характерным размером диффузного слоя Гуи. Вязкость жидкости $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с, концентрация ионов $n = 1.1 \cdot 10^{25}$ м⁻³, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, температура $T = 300$ К, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 100$. **0.5**

Часть С. Движение электролита в капилляре (4 балла)

В части В было показано, что вблизи стенки капилляра есть нескомпенсированный объемный заряд. Теперь, если приложить электрическое поле вдоль капилляра, ионы придут в движение, вовлекая за собой и окружающую жидкость. Разумеется, приложенное поле должно быть небольшим, чтобы его вкладом в изменение потенциала $\varphi(z)$ можно было пренебречь. В этой части не нужно учитывать разность давлений ΔP , о которой говорилось ранее.

Road to IPhO



C1 Запишите второй закон Ньютона для небольшого объема жидкости в проекции на направление электрического поля, учитывая вязкое трение и электрическое поле, действующие на нескомпенсированный заряд. Выразите ответ через электрическое поле E , концентрацию ионов n_0 , потенциал $\varphi(z)$, параметры жидкости и капилляра, а также скорость $v(z)$ и ее производные. **0.8**

C2 Найдите зависимость скорости течения жидкости от координаты $v(z)$. **1.2**

C3 Пусть в капилляре имеется установившееся ламинарное течение воды. В некоторый момент в сечение AA' капилляра равномерно впрыскивается реагент, рисунок такой же как в части А. В листе ответов нарисуйте, где будет находиться реагент через $\tau = 5$ с. Используйте параметры капилляра из А2 и численные данные из В5. Потенциал $\varphi_\delta = 1.8$ В, падение напряжения на длине капилляра $U = 0.3$ В. Пренебрегите диффузией реагента вне диффузионного слоя. Для рисунка выберите подходящий масштаб по горизонтальной оси, направленной вдоль направления течения жидкости. **1.0**

Движение жидкости в микрофлюидике происходит в тонких капиллярах и на небольших скоростях и, таким образом, является как правило ламинарным. В привычных макроскопических трубах перемешивание жидкостей происходит главным образом из-за турбулентных явлений. Соответственно, в микрофлюидике смешивание жидкостей является существенной проблемой.

C4 На основе части этой задачи предложите систему, которая позволяет перемешать слои жидкости, текущие вблизи стенки капилляра. **1.0**