Анизотропия теплопроводности

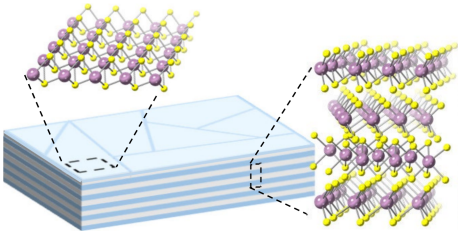


Рис. 1

В сентябре 2021 года учёные из Чикагского университета создали материал, обладающий рекордной анизотропией теплопроводности: теплопроводность материала вдоль выделенного направления оказалась почти в тысячу раз меньше теплопроводности в направлениях, перпендикулярных ему! Такого эффекта они смогли добиться, наслаивая двумерные слои атомов друг на друга со случайной ориентацией, как показано на рисунке *1*. В то время как теоретическая сторона данного эффекта довольно сложна и выходит далеко за рамки классической школьной программы, экспериментальная сторона оказывается доступной для понимания и обработки. В этой задаче мы исследуем, как именно учёные смогли измерить теплопроводность материала вдоль различных направлений.

О методе наименьших квадратов.

Для решения задачи вам потребуется обобщение МНК на случай произвольной, не обязательно линейной, зависимости. Пусть в качестве экспериментальной зависимости задан набор точек (x_i, y_i), который мы хотим промоделировать некоторой функцией $f = f(x, a_1, a_2, \dots)$, где $a_1, a_2, \dots$ – параметры, которые можно варьировать. По определению метода наименьших квадратов вариация параметров должна привести к тому, что следующая сумма должна быть минимальной:

$$S = \sum_i \Delta y_i^2 = \sum_i \left(y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots)\right)^2 \to \min_{a_1, a_2, \dots}$$

Задача минимизации этой суммы сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

где символ ∂ обозначает дифференцирование по параметру, указанному в знаменателе, когда остальные параметры зафиксированы.

Часть А. Поперечная теплопроводность (4.0 балла).

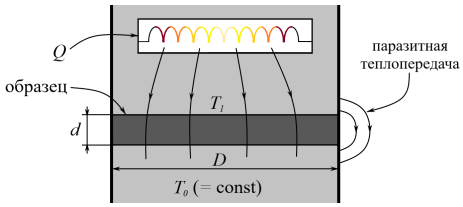


Рис. 2

Для измерения теплопроводности в направлении, перпендикулярном слоям, однородный образец диаметром $D = 1$ мм и толщиной d зажимают между двумя плоскими пластинами из материалов с высокой теплопроводностью, один из которых поддерживают при постоянной температуре T_0, а к другому подводят постоянную мощность $Q = 3.1 \cdot 10^{-4}$ Вт. После установления теплового равновесия измеряется температура T_1 второй пластины, откуда получается разность $\Delta T = T_1 - T_0$. Для уточнения природы механизмов теплопроводности исследователям также необходимо проверить, зависит ли теплопроводность материала от его температуры.

В таблице в листе ответов вам даны значения разности температур ΔT в зависимости от толщины образца d для трёх разных значений температуры T_0 и двух различных материалов – сульфидов молибдена (MoS_2) и вольфрама (WS_2).

В идеальном эксперименте разность температур ΔT можно было бы описать формулой:

$$\Delta T = Ad, \tag{1}$$

где $A = \dfrac{4Q}{\pi \varkappa_\perp D^2}$, а $\varkappa_\perp$ – коэффициент теплопроводности в направлении, перпендикулярном слоям. Однако теплообмен между двумя пластинами происходит не только за счёт теплопроводности, но и за счёт других способов теплопередачи. Их можно с хорошей точностью учесть, добавив в уравнение (1) поправочный член:

$$\Delta T = Ad - BT_0^{1/2} d^{3/2}. \tag{2}$$

A1 С помощью метода наименьших квадратов получите формулы для нахождения коэффициентов A и B для каждого значения температуры T_0 и для каждого из материалов. Ответ выразите через средние по выборке значения произведений вида $\Delta T^{k_1} d^{k_2}$, где $k_{1,2}$ – некоторые числа. **0.6**

A2 Для сульфида молибдена (MoS_2) найдите A и B для каждой из температур T_0. **1.2**

Будем считать, что теплопроводность $\varkappa_\perp$ не зависит от температуры, если выполнено соотношение:

$$\Delta A < \overline{B} T_{0\,\max}^{1/2} d_{\max^{1/2}},$$

где ΔA – максимальная разность значений A, полученных в предыдущем пункте, а $\overline{B}$ – среднее арифметическое полученных в предыдущем пункте значений B, $d_{\max=200\text{ мкм}}$, $T_{0\,\max} = 373$ К.

A3 Выясните, можно ли по результатам эксперимента заключить, что теплопроводность $\varkappa_\perp$ зависит от температуры, в листе ответов подчеркните правильный вариант (обе стороны неравенства должны быть явно вычислены в решении). Найдите среднее арифметическое $\overline{A}$ и вычислите по нему теплопроводность $\varkappa_\perp$. **0.5**

A4 Выполните пункты **A2** и **A3** для сульфида вольфрама (WS_2). **1.7**

Часть B. Продольная теплопроводность (6.0 баллов)

Для измерения продольной теплопроводности образец толщиной d помещают на горизонтальную поверхность из очень плохо проводящего тепло материала и освещают его в центре тонким лазерным пучком постоянной мощности. В результате в образце устанавливается некоторое распределение температуры, которое можно получить, решив уравнение теплопроводности в полярных координатах. Температура на больших расстояниях от центра лазерного пучка считается равной T_0. Чтобы узнать, насколько повысилась температура образца в центре, исследователи измеряют мощность отражённого от него лазерного излучения, поскольку при небольших изменениях температуры ΔT коэффициент отражения можно с хорошей точностью считать линейной функцией ΔT. Кроме того, в силу излучения и теплопроводности между образцом и окружающей средой, с его поверхности происходит рассеяние тепла с мощностью, пропорциональной разности температур ΔT. Это приводит к тому, что реальная ΔT оказывается всегда меньше предсказываемой и имеет некоторый предел $\Delta T_{\max}$.

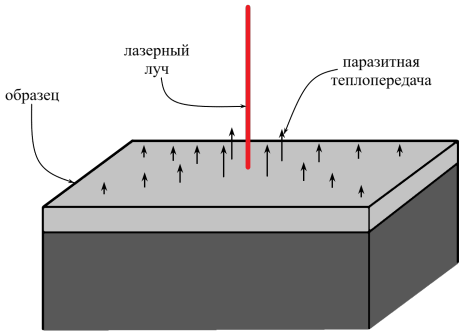


Рис. 3

Таким образом, нам будут интересны два асимптотических случая:

1) случай большой толщины образца d. При этом вклад теплопроводности внутри образца будет доминирующим, и изменение температуры можно описать уравнением:

$$\Delta T = \frac{A}{d} - \frac{B}{d^2}, \tag{3}$$

где $A = \dfrac{A_0}{\varkappa_\parallel}$, $A_0 = 9.43$ мВт и B – некоторые постоянные;

2) случай малой толщины образца d. При этом доминирующим будет вклад теплопроводности и излучения между образцом и окружающей средой, и изменение температуры можно описать уравнением:

$$\Delta T = \Delta T_{\max} - Cd, \tag{4}$$

где C – некоторый коэффициент.

В таблице в листе ответов вам даны значения разности температуры ΔT в зависимости от толщины образца d для трёх разных значений температуры T_0 и двух различных материалов – сульфидов молибдена (MoS_2) и вольфрама (WS_2). При решении задачи считайте, что половина точек с бóльшим d соответствует случаю *1)*, а другая половина – случаю *2)*.

Рассмотрим сначала случай *1)*.

B1 С помощью метода наименьших квадратов получите формулу для нахождения коэффициента A для каждого значения температуры T_0 и для каждого из материалов. Ответ выразите через средние по выборке значения произведений вида $\Delta T^{k_1} d^{k_2}$, где $k_{1,2}$ – некоторые числа. **0.6**

B2 Для сульфида молибдена $(\mathrm{MoS_2})$ найдите A для каждой из температур T_0. Отсюда для каждой T_0 найдите значения $\varkappa_\parallel$. Найдите коэффициент анизотропии теплопроводности $\rho = \dfrac{\varkappa_\parallel}{\varkappa_\perp}$ при температуре $T_0 = 273$ K. **1.0**

В этот раз значения $\varkappa_\parallel$ явно зависят от температуры. Можно предположить, что они удовлетворяют степенной зависимости $\varkappa_\parallel \propto \dfrac{1}{T_0^n}$.

B3 Найдите n. **0.4**

B4 Выполните пункты **B2** и **B3** для сульфида вольфрама $(\mathrm{WS_2})$. **1.4**

Рассмотрим теперь случай 2).

B5 С помощью метода наименьших квадратов получите формулу для нахождения коэффициента $\Delta T_{\max}$ для каждого значения температуры T_0 и для каждого из материалов. Ответ выразите через средние по выборке значения произведений вида $\Delta T^{k_1} d^{k_2}$, где $k_{1,2}$ – некоторые числа. **0.6**

B6 Для каждого из материалов найдите $\Delta T_{\max}$ для каждой из температур T_0. **1.2**

Для того, чтобы в будущем улучшить условия проведения эксперимента, учёные хотят узнать, из-за чего в первую очередь теплота передаётся от образца окружающей среде – из-за теплопроводности или излучения. Для этого как раз можно использовать полученные значения $\Delta T_{\max}$. Можно показать, что если доминирующий вклад вносит теплопроводность, то $\Delta T_{\max} \propto \dfrac{1}{\sqrt{T_0}}$, а если излучение, то $\Delta T_{\max} \propto \dfrac{1}{T_0^3}$. Попробуем приблизить $\Delta T_{\max}$ степенной зависимостью $\Delta T_{\max} \propto \dfrac{1}{T_0^m}$.

B7 Для каждого из материалов найдите m. Что вносит в теплопередачу между образцом и окружающей средой основной вклад – теплопроводность или излучение? Подчеркните правильный вариант в листе ответов. **0.8**