

A1^{1.00} Пусть в капилляре имеется установившееся ламинарное течение воды. Найдите зависимость скорости течения жидкости $v(z)$ в капилляре от координаты z при установившемся ламинарном течении воды в капилляре. Ось z направлена вдоль стороны b , начало координат находится на одной из стенок капилляра. Выразите ответ через ΔP , параметры капилляра и вязкость жидкости η .

Рассмотрим тонкий слой жидкости, заключённый между плоскостями с координатами $z_1 = z$ и $z_2 = z + dz$. Силы вязкого трения, действующие в соответствующих плоскостях:

$$f_1 = -\eta aL \frac{dv_x}{dz}(z)$$

$$f_2 = \eta aL \frac{dv_x}{dz}(z + dz)$$

Тогда второй закон Ньютона примет вид:

$$\Delta P a dz + f_1 + f_2 = 0 \quad (1)$$

Отсюда уравнение на скорость:

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{\eta L} \quad (2)$$

Заметим, что совершенно необязательно было устремлять толщину слоя к нулю (т.е. уравнение (1) верно и при конечном dz). Более того, зафиксировав (например $z_1 = 0$ или $z_1 = b/2$), мы получим проинтегрированный аналог уравнения (2).

Общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$v_x = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Константы интегрирования определяются граничными условиями, в данном случае - $v(0) = 0$ и $v(b) = 0$. Отсюда получаем правильный ответ

Ответ:

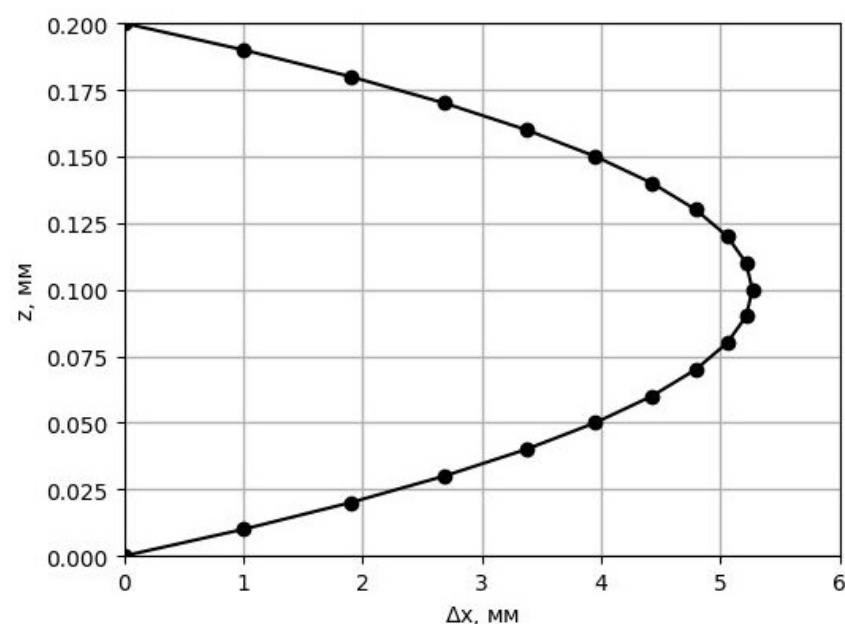
$$v(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L} (bz - z^2)$$

A2^{1.00} В некоторый момент в начальное сечение капилляра AA' равномерно впрыскивается реагент. На рисунке жирные горизонтальные линии обозначают стенки капилляра. В листе ответов нарисуйте, где будет находиться реагент через $\tau = 5$ с. Для рисунка выберите подходящий масштаб по горизонтальной оси, которая направлена вдоль течения жидкости.

Параметры капилляра: $L = 8$ мм, $b = 0.2$ мм, разность давлений $\Delta P = 1.5$ Па, $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с. Диффузией реагента пренебрегите.

Построим на графике зависимость $x(z) = \tau v(z)$

Ответ:



B1^{0.50} Найдите установившуюся скорость ионов $v_z(z)$ на расстоянии z от границы капилляра. Считайте, что перемещение иона за время установления скорости мало. Ответ выразите через заряд иона q ($q = \pm e$), α и потенциал $\varphi(z)$ (и его производные).

В установившемся режиме второй закон Ньютона в проекции на ось z выглядит следующим образом:

$$-\alpha v_z + qE_z = 0$$

Выражая электрическое поле через градиент потенциала $E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$, получаем ответ

Ответ:

$$v_z = -\frac{q}{\alpha} \frac{d\varphi}{dz} \quad (3)$$

B2 1.50

Выразите концентрации катионов (n_+) и анионов (n_-) вблизи стенки капилляра через потенциал в этой точке, а также через n_0, e, α, k, T .

Поток частиц, связанный с наличием электрического поля уравнивается потоком ионов, связанным с диффузией. Таким образом, условие баланса будет выглядеть следующим образом:

$$nv_z - D \frac{dn}{dz} = 0$$

Подставляя сюда уравнение (3), получим

$$-\frac{q}{\alpha D} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$$

Интегрируя обе части уравнения по z и подставляя $D = \frac{kT}{\alpha}$, находим

$$-\frac{q}{kT}(\varphi - 0) = \ln\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

В итоге,

Ответ:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi}{kT}\right)$$

Результат данного пункта является частным случаем распределения Больцмана. Конечно же, такое совпадение не случайно.

B3 0.50

Выразите объемную плотность нескомпенсированного заряда $\rho(z)$ вблизи стенки капилляра через потенциал $\varphi(z)$, концентрацию ионов n_0 и физические постоянные e, k, T . Считая, что приложенный к стенке потенциал мал ($e\varphi_0 \ll kT$), получите приближенное значение $\rho(z)$.

$$\rho = e(n_+ - n_-) = en_0 \left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right] = -2en_0 \sinh\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \quad (4)$$

Раскладывая выражение по параметру $\frac{e\varphi}{kT}$, найдём

Ответ:

$$\rho \approx -2 \frac{e^2 n_0 \varphi}{kT} \quad (5)$$

B4 1.00

Найдите зависимость потенциала $\varphi(z)$ от координаты вблизи стенки капилляра в диффузном слое. Помните, что на границе потенциал равен φ_δ . Выразите ответ через n_0, φ_δ, T , физические постоянные и параметры электролита.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме в одномерном случае имеет вид:

$$\rho = -\epsilon\epsilon_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

Используя разложение (5) получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 2 \frac{e^2 n_0}{\epsilon\epsilon_0 kT} \varphi \quad (6)$$

Это линейное дифференциальное уравнение, его общее решение в данном случае выглядит следующим образом:

$$\varphi(z) = C_1 \exp(z/\lambda) + C_2 \exp(-z/\lambda),$$

где λ определяется из уравнения (6), а коэффициенты C_1 и C_2 – из начальных условий $\varphi(0) = \varphi_\delta$ и $\varphi(+\infty) = 0$. Заметим, что второе граничное условие автоматически подразумевает $\lambda \ll b$, т.е. нахождение второй стенки на бесконечности. При учёте отклонения от этого условия, строго говоря, $C_1 \neq 0$. Однако, ответ пункта B5 позволяет отбросить какие-либо сомнения по этому поводу. В итоге

Ответ:

$$\varphi(z) = \varphi_\delta \exp(-z/\lambda), \tag{7}$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{2 e^2 n_0}}$.

Примечание.

Заметим более интересный с точки зрения физики момент. Для применимости разложения (5) и характерных значений $\varphi_\delta \sim 1$ В температура T должна быть $T \gg \frac{e \varphi_\delta}{k} \sim 10^4$ К!

Однако, используемое в задаче приближение не так плохо, как могло бы показаться на первый взгляд. Убедимся в этом, решив уравнения без использования приближения (5).

Из комбинации (4) и теоремы Гаусса находим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 2 \frac{e n_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \sinh\left(\frac{e \varphi}{k T}\right)$$

Далее, интегрируя уравнение по φ :

$$\begin{aligned} \int \sinh\left(\frac{e \varphi}{k T}\right) d\varphi &= \frac{k T}{e} \cosh\left(\frac{e \varphi}{k T}\right) + C \\ \int \frac{d^2 \varphi}{dz^2} d\varphi &= \int \frac{d\varphi'_z}{dz} \varphi'_z dz = \int \varphi'_z d\varphi'_z = \frac{(\varphi'_z)^2}{2} + C, \end{aligned}$$

где $\varphi'_z \equiv \frac{d\varphi}{dz} = -E_z$. Подставляя граничное условие $\varphi'_z(+\infty) = 0$ получаем:

$$\varphi'_z = -2 \sqrt{\frac{e n_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{k T}{e} \left(\cosh\left(\frac{e \varphi}{k T}\right) - 1 \right)} = -2 \sqrt{2 \frac{e n_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{k T}{e}} \sinh\left(\frac{e \varphi}{2 k T}\right)$$

Далее, разделяя переменные и интегрируя:

$$-2 \sqrt{2 \frac{e n_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{k T}{e}} z = \int_{\varphi_\delta}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sinh\left(\frac{e \varphi}{2 k T}\right)} = \frac{2 k T}{e} \ln \tanh \frac{e \varphi}{4 k T} \Big|_{\varphi_\delta}^{\varphi}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{4 k T}{e} \tanh^{-1} \left[\tanh\left(\frac{e \varphi_\delta}{4 k T}\right) \exp(-z/\lambda) \right],$$

где λ в точности равна своему значению в предыдущем рассмотрении.

Теперь проанализируем асимптотику данного решения на бесконечности. Для $z \gg \lambda$ экспонента оказывается малой, поэтому в ведущем приближении $\tanh^{-1}(x) \approx x$, и реальная зависимость оказывается

$$\varphi \rightarrow \frac{4 k T}{e} \tanh\left(\frac{e \varphi_\delta}{4 k T}\right) \exp(-z/\lambda)$$

Таким образом, наше приближение на низких температурах даёт правильное значение λ , однако коэффициент перед экспонентой (префактор) будет неточным.

B5^{0.50}

Найдите расстояние λ (формулу и численное значение), на котором потенциал $\varphi(z)$ уменьшается в e раз. Эта длина считается характерным размером диффузного слоя Гуи. Вязкость жидкости $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с, концентрация ионов $n = 1.1 \cdot 10^{25}$ м⁻³, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, температура $T = 300$ К, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 100$.

Потенциал уменьшается в e раз при $z = \lambda$, формула для λ была найдена в пункте B4.

Ответ: $\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{2 e^2 n_0}} \approx 2,55$ нм

C1^{0.80} Запишите второй закон Ньютона для небольшого объема жидкости в проекции на направление электрического поля, учитывая вязкое трение и электрическое поле, действующие на нескомпенсированный заряд. Выразите ответ через электрическое поле E , концентрацию ионов n_0 , потенциал $\varphi(z)$, параметры жидкости и капилляра, а также скорость $v(z)$ и ее производные.

Данный пункт аналогичен решению пункта A1. Силы вязкого трения, действующие на слой будут эквивалентны, а электрическое поле будет действовать с силой

$$F_E = \rho E a L dz$$

Тогда аналогично уравнению (1):

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho E = 0$$

С учетом выражений (5) и (7):

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\lambda^2} \varphi_\delta \exp(-z/\lambda) = 0$$

Ответ:

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\lambda^2} \varphi_\delta \exp(-z/\lambda) = 0$$

C2^{1.20} Найдите зависимость скорости течения жидкости от координаты $v(z)$.

Из пункта C1 имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\eta \lambda^2} \varphi_\delta e^{(-z/\lambda)}$$

Найдем его решение, проинтегрировав обе части по dz дважды:

$$v = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\eta} \varphi_\delta e^{(-z/\lambda)} + C_1 z + C_2 \quad (C_1, C_2 = const)$$

Из граничного условия $v(0) = 0$ находим:

$$C_2 = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\eta} \varphi_\delta$$

Со вторым граничным условием всё обстоит немного сложнее. Строго говоря, *правильным* граничным условием является $v(b) = 0$. Однако для того, чтобы рассматривать вторую стенку необходимо внести изменения и в распределение потенциала, добавив возрастающую экспоненту. Но с точки зрения физики это только добавит такую же картинку распределения потенциала у другой стенки.

При рассмотрении же только одной стенки возникает следующая проблема: с используемой точностью при $z \sim \lambda$ любые граничные условия для $z \sim b$ будут неотличимы друг от друга, так как фактически они все эквивалентны бесконечности и члены вида $z/b \ll 1$ пренебрежимо малы. Тем не менее если мы хотим найти распределение потенциала на масштабах размеров трубы, вклад этих членов становится существенным.

В нашей же модели найти C_2 можно следующим образом. Обратимся к формуле (8) – она справедлива при любом $\varphi(z)$. Т.к. граничные условия на стенках одинаковы, $v(z)$ и $\varphi(z)$ должны быть симметричны относительно центра трубы. Из этого факта и формулы (8) следует $C_1 = 0$.

Ответ:

$$v = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\eta} \varphi_\delta \left(1 - e^{-z/\lambda}\right)$$

Примечание.

На самом деле можно получить более общее выражение для скорости v , показав, что она зависит только лишь от $\varphi(z)$, при этом вид самой зависимости потенциала от координаты неважен. Запишем уравнение:

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho E = 0$$

С учетом теоремы Гаусса оно запишется в виде:

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} E = 0$$

Аналогично два раза проинтегрируем по dz и получим:

$$v = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E \varphi}{\eta} + C_3 z + C_4 \quad (C_3, C_4 = \text{const})$$

$C_3 = 0$ в силу симметрии трубки.

При $\varphi = \varphi_\delta$ $v = 0$, откуда $C_4 = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E \varphi_\delta}{\eta}$.

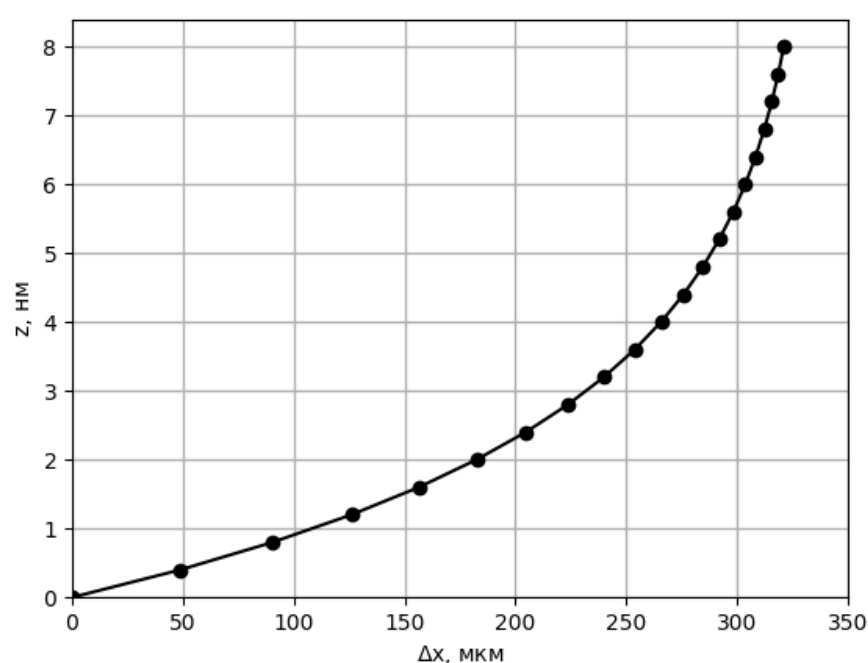
Итоговый ответ:

$$v = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E}{\eta} (\varphi - \varphi_\delta) \quad (8)$$

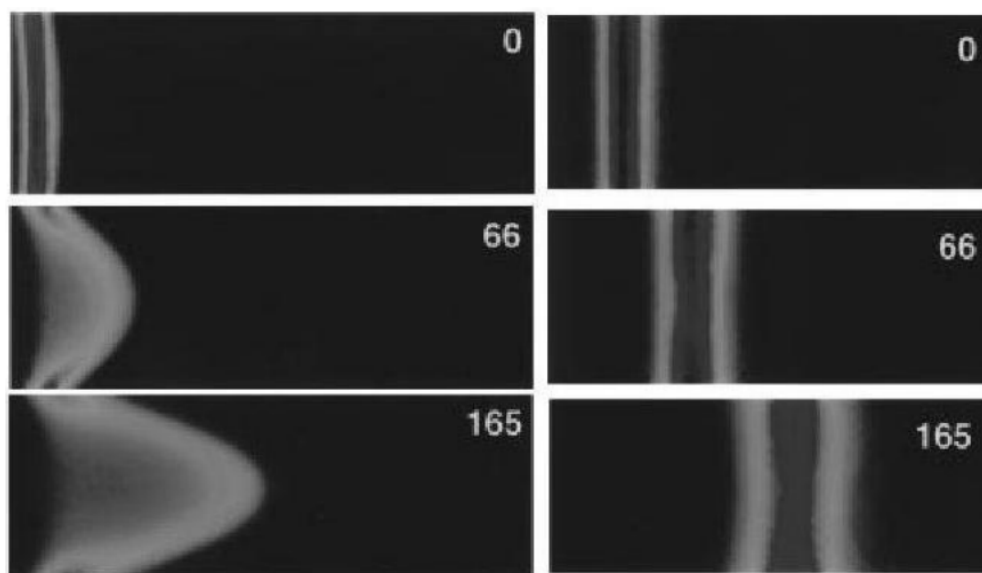
С3^{1.00} Пусть в капилляре имеется установившееся ламинарное течение воды. В некоторый момент в сечение AA' капилляра равномерно впрыскивается реагент, рисунок такой же как в части **A**. В листе ответов нарисуйте, где будет находиться реагент через $\tau = 5$ с. Используйте параметры капилляра из **A2** и численные данные из **B5**. Потенциал $\varphi_\delta = 1.8$ В, падение напряжения на длине капилляра $U = 0.3$ В. Пренебрегите диффузией реагента вне диффузионного слоя. Для рисунка выберите подходящий масштаб по горизонтальной оси, направленной вдоль направления течения жидкости.

По формуле для скорости, полученной в пункте **C2** легко рассчитывается смещение слоя жидкости ($\Delta x = v\tau$). Получив значения для нескольких z , можно построить график, представленный ниже.

Ответ:



Заметим, что экспонента значительно затухает уже при $z \sim \lambda$. Учитывая, что $\lambda \ll b$, при $z \sim b$ $v \approx -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E}{\eta} \varphi_\delta = \text{const.}$, и на рисунке фронт будет изображаться как прямая линия, параллельная оси z .



Фотографии реального эксперимента. Слева -- профиль распределения реагента в случае однородно распределённого давления, справа -- случай, рассматриваемый в части **C**.

С4^{1.00} На основе части **C** этой задачи предложите систему, которая позволяет перемешать слои жидкости, текущие вблизи стенки капилляра.

Ответ: В данной части возможны различные системы, приведем качественный пример одной из них.

Обозначим за Ox ось, сонаправленную с $\vec{E}$ на рисунке из части **C**. Пусть проекция поля на данную ось имеет следующий вид зависимости от координаты x :

$$E_x = E_0 \sin(kx)$$

На основании предыдущих пунктов части C мы можем утверждать, что это приведет к тому, что слои в некоторых местах будут вынуждены двигаться навстречу друг другу. Такое движение приведет к их смешиванию.