

A1^{0.70} Получите точное выражение для угловой скорости орбитального вращения ω .
 Ответ выразите через G, m, M и L .

Пусть $\vec{e}_1$ - единичный вектор, проведённый направленный на меньшее тело из центра большего. Ускорения тел за счет гравитации:

$$\vec{a}_m = -\frac{GM}{L^2}\vec{e}_1 \quad \vec{a}_M = \frac{Gm}{L^2}\vec{e}_1; \quad \vec{a}_M - \vec{a}_m = \frac{G(M+m)}{L^3}\vec{e}_1.$$

С другой стороны:

$$\vec{a}_M - \vec{a}_m = \omega^2 L \vec{e}_1,$$

откуда окончательно:

Ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{L^3}}$$

A2^{0.20} Получите точное выражение для разности потенциалов гравитационного поля малого тела $\Delta\varphi_{\text{гр}} = \varphi_{\text{гр}P} - \varphi_{\text{гр}O}$ в точках P и O . Ответ выразите через G, m, L, θ и $r(\theta)$.

Потенциал поля малого тела в точке, расстояние до которой от неё равно L_m , равен:

$$\varphi_{\text{гр}} = -\frac{Gm}{L_m}$$

Найдём расстояние от малого тела до точки A по теореме косинусов:

$$L_m^2 = L^2 + r^2(\theta) - 2Lr(\theta)\cos\theta$$

Окончательно имеем:

Ответ:

$$\Delta\varphi_{\text{гр}} = Gm \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr\cos\theta}} \right)$$

A3^{0.50} Получите точное выражение для разности потенциалов сил инерции $\Delta\varphi_{\text{ин}} = \varphi_{\text{ин}P} - \varphi_{\text{ин}O}$ в точках P и O . Ответ выразите через G, m, M, L, θ и $r(\theta)$.

Поскольку жидкость неподвижна, а большее тело вращается с постоянной угловой скоростью - вклад в разность потенциалов вносят поля сил инерции $-\Delta m \vec{a}_0$ и $\Delta m \omega^2 \vec{r}_\perp$, действующие на частицу массой Δm .
 Для разности потенциалов точек A и O имеем:

$$\varphi_{\text{ин}A} - \varphi_{\text{ин}O} = - \int_O^A (\omega^2 \vec{r}_\perp - \vec{a}_0) \cdot d\vec{r}$$

Учитывая, что $\vec{a}_0 = Gm\vec{e}_1/L^2$, а $\vec{r}_\perp = \vec{r}$:

$$\varphi_{\text{ин}A} - \varphi_{\text{ин}O} = - \int_O^A \left(\omega^2 \vec{r} - \frac{Gm}{L^2} \vec{e}_1 \right) \cdot d\vec{r} = \frac{Gmr\cos\theta}{L^2} - \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Окончательно:

Ответ:

$$\Delta\varphi_{\text{ин}} = \frac{Gmr\cos\theta}{L^2} - \frac{G(M+m)r^2}{2L^3}$$

A4^{1.30} Получите зависимость $h(\theta)$. Ответ выразите через m, M, R, L и θ . Максимально упростите ваш ответ. Качественно изобразите форму поверхности в рассматриваемом сечении. На этом же рисунке изобразите невозмущённую форму поверхности.

Примечание: воспользуйтесь следующим приближением:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} \approx 1 + a\cos\theta + \frac{a^2(3\cos^2\theta-1)}{2}$$

Поверхность большего тела в равновесии эквипотенциальна. Так как возмущения поверхности малы, будем считать, что потенциал гравитационного поля большего тела на поверхности равен:

$$\varphi_M = -\frac{GM}{r(\theta)}$$

Поскольку поверхность эквипотенциальна:

$$\varphi_A = Gm \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2rL\cos\theta}} \right) + \frac{Gmr\cos\theta}{L^2} - \frac{G(M+m)r^2}{2L^3} - \frac{GM}{r(\theta)} + C_1 = C_2$$

где C_1 и C_2 - некоторые постоянные величины.
Раскладывая выражение под корнем:

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2rL\cos\theta}} \approx \frac{1}{L} \left(1 + a\cos\theta + \frac{a^2(3\cos^2\theta-1)}{2} \right); \quad a = \frac{r}{L}.$$

Таким образом, имеем:

$$-\frac{GM}{r} - \frac{G(M+3m\cos^2\theta)r^2}{2L^3} = \text{const}$$

Заметим, что слагаемые, пропорциональные $\cos\theta$ полностью сократились. Из-за этого и потребовалось раскладывать потенциал малого тела до второго порядка.

Далее подставим $r = R + h$ и разложим до первого порядка потенциал большего тела. В потенциале малого тела можно сразу считать $r = R$, так как он сам является малой величиной из-за условия $R \ll L$. Получим

$$-\frac{GM}{R} + \frac{GMh}{R^2} - \frac{G(M+3m\cos^2\theta)R^2}{2L^3} = \text{const}.$$

Оставим только переменные слагаемые:

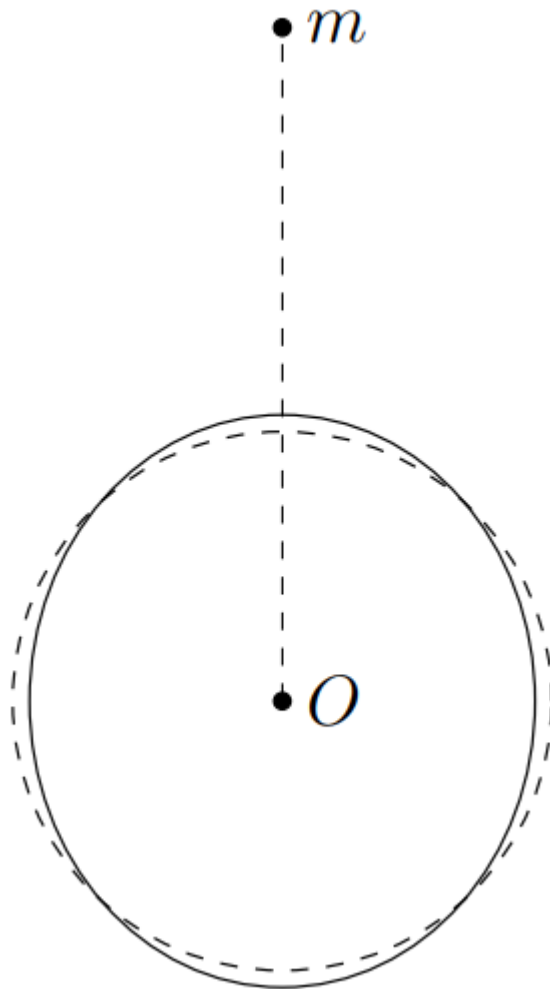
$$h\frac{GM}{R^2} - \frac{3GmR^2\cos^2\theta}{2L^3} = \text{const}$$

Поскольку $h(\pi/2) = 0$, последняя константа равна нулю. Тогда имеем:

Ответ:

$$h(\theta) = \frac{3mR^4\cos^2\theta}{2Md^3}$$

Ответ:



Качественная форма поверхности

B1^{0.50}

Покажите, что касательную компоненту силы $F_\tau(t, \theta)$, действующую на частицу массой Δm , находящуюся на поверхности большего тела под углом θ , можно представить в виде:

$$F_\tau(t, \theta) = \Delta m \alpha \sin(2\omega_1 t - 2\theta)$$

Найдите α . Ответ выразите через G, m, L и $r(\theta)$.

Примечание: воспользуйтесь результатами, полученными при решении пункта A4.

В пункте A4 нами было получено приближённое выражение для потенциала сил инерции и гравитационного поля меньшего тела:

$$\varphi_{\text{внеш}} = -\frac{G(M + 3m \cos^2 \theta)r^2}{2L^3}$$

Тогда для компоненты силы F_τ получим:

$$F_\tau = -\frac{\Delta m}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{внеш}}}{\partial \theta} = -\frac{3Gm\Delta m r \sin 2\theta}{2L^3}$$

Отметим, что эта компонента силы возникает из-за неоднородности гравитационного поля меньшего тела. Поскольку $\omega \neq \Omega$, в произвольный момент времени t параметр θ равен:

$$\theta = \theta_0 - \omega_1 t, \quad \omega_1 = \omega - \Omega.$$

Также учтем, что с нужной нам точностью $r \approx R$. Тогда окончательно имеем:

$$F_\tau(t, \theta_0) = \frac{3Gm\Delta m R}{2L^3} \sin(2\omega_1 t - 2\theta_0)$$

Ответ:

$$\alpha = \frac{3GmR}{2L^3}.$$

B2^{0.80}

Покажите, что зависимость $\theta(t, \theta_0)$ имеет следующий вид:

$$\theta(t) = \theta_0 + A \sin(2\omega_1 t - 2\theta_0 - \varphi_0)$$

Найдите A и φ_0 . Ответы выразите через $G, m, L, \gamma, \omega_0, \omega, \Omega$ и θ_0 .

Подставим $F_\tau(t, \theta)$ в уравнение движения:

$$\Delta m r^2 \left(\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_0) \right) = r F_\tau(t, \theta) = \Delta m r^2 \cdot \frac{3Gm}{2L^3} \sin(2\omega_1 t - 2\theta)$$

Поскольку $\omega_0^2 \gg Gm/L^3$ - можно считать, что $F_\tau(t, \theta) \approx F_\tau(t, \theta_0)$. Тогда:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_0) = \frac{3Gm}{2L^3} \sin(2\omega_1 t - 2\theta_0)$$

Решение уравнения будем искать в виде $\theta(t) = \theta_0 + Re \left(\hat{A} e^{2i(\omega - \Omega)t} \right)$:

$$(\omega_0^2 - 4\omega_1^2 + 4i\omega_1\gamma) \hat{A} = \frac{3Gm}{2L^3} e^{-i(2\theta_0 + \pi/2)}$$

Представим $\hat{A}$ в показательной форме $\hat{A} = A e^{-i\varphi_0}$, где:

Ответ:

$$A = \frac{3Gm}{2L^3 \sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)^2 + 16\gamma^2\omega_1^2}}; \quad \varphi_0 = \arctan \frac{4\omega_1\gamma}{\omega_0^2 - 4\omega_1^2}.$$

В3^{0.40}

Получите выражение для скорости роста высоты $\dot{h}'(t, \theta_0)$ в момент времени t при угле θ_0 . Ответ выразите через h_0 и $\frac{d\dot{\theta}}{d\theta_0}$

Объем жидкости, втекающей через одну из граней hdz за время dt равен произведению скорости течения $\dot{\theta} R$ на площадь hdz и рассматриваемое время dt :

$$dV_1 = \dot{\theta} R h dz dt \approx \dot{\theta} R h_0 dz dt.$$

Здесь мы учитываем, что высота поверхности воды меняется мало, и это практически не влияет на поток воды. Скорости течения, отвечающие углам θ_0 и $\theta_0 + d\theta_0$ несколько отличаются, поэтому разность втекающего и вытекающего объемов воды

$$dV = \dot{\theta}(\theta_0) R h_0 dz dt - \dot{\theta}(\theta_0 + d\theta_0) R h_0 dz dt = -R h_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta_0} d\theta_0 dz dt.$$

Из-за этого меняется высота поверхности жидкости:

$$dV = R d\theta_0 dz dh = R d\theta_0 dz \dot{h} dt = -R h_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta_0} d\theta_0 dz.$$

Отсюда $\dot{h} = -h_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta_0}$, а поскольку $h_0 = \text{const}$

Ответ:

$$\dot{h}'(t, \theta) = -h_0 \frac{\partial \dot{\theta}(t, \theta)}{\partial \theta_0}.$$

В4^{0.30}

Считая, что амплитуда колебаний h' одинакова для всех значений θ_0 , получите зависимость $h(t)$. Ответ выразите через h_0 , A , ω_1 , φ_1 и t .

Из результатов пункта В2 получим:

$$\theta = \theta_0 + A \sin(2\omega_1 t - \varphi_1), \quad \dot{\theta} = 2\omega_1 A \cos(2\omega_1 t - \varphi_1).$$

Тогда находим

$$\frac{\partial \dot{\theta}(t, \theta_0)}{\partial \theta_0} = 4\omega_1 A \sin(2\omega_1 t - \varphi_1),$$

откуда:

$$\dot{h}' = -4h_0\omega_1 A \sin(2\omega_1 t - \varphi_1)$$

Интегрируя, находим:

Ответ:

$$h(t) = h_0(1 + 2A \cos(2\omega_1 t - \varphi_1))$$

B5^{0.40}

Для момента времени t определите значения углов θ_0 , соответствующих максимальному значению $h(t, \theta_0)$. Ответы выразите через ω_1 , t и φ_0 .

В точках максимума косинус равен единице, поэтому:

$$2\omega_1 t - \varphi_1 = 0; 2\pi.$$

Подставляя φ_1 , находим:

Ответ:

$$\theta_{1,2} = \omega_1 t - \frac{\varphi_0}{2}; \pi + \omega_1 t - \frac{\varphi_0}{2}.$$

B6^{1.40}

Найдите момент сил M_z , действующий со стороны малого тела на поверхность большого относительно оси z . Ответ выразите через G , m , ρ , R , h_0 , L , A и φ_0 .

Плечо силы, соответствующее углу β , равно $R \sin \beta$. Тогда для элемента момента силы dM_z имеем:

$$dM_z = R \sin \beta dF_\tau(t, \theta, \beta)$$

Для dF_τ также имеем:

$$dF_\tau = \frac{3GmR \sin \beta}{2L^3} \Delta m \sin(2\omega_1 t - 2\theta).$$

Масса рассматриваемого объема

$$\Delta m = \rho dV = \rho h(t, \theta, \beta) dS = \rho h(t, \theta, \beta) R^2 \sin \beta d\beta d\theta.$$

Тогда получим:

$$dF_\tau = \frac{3GmR \sin \beta}{2L^3} \sin(2\omega_1 t - 2\theta) \rho h(t, \theta, \beta) R^2 \sin \beta d\beta d\theta.$$

Для $h(t, \theta, \beta)$ имеем:

$$h(t, \theta, \beta) = h_0(1 + 2A \cos(2\omega_1 t - \varphi_1))$$

так как A не зависит от расстояния до оси z .

Представим выражение для M_z в виде интеграла:

$$M_z = \frac{3Gm\rho R^4 h_0}{2L^3} \int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta \int_0^{2\pi} (1 + 2A \cos(2\omega_1 t - \varphi_1)) \sin(2\omega_1 t - 2\theta) d\theta$$

Для интеграла по β имеем:

$$\int_0^\pi \sin^3 \beta d\beta = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \beta) d \cos \beta = \cos \beta - \frac{\cos^3 \beta}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

Поэтому:

$$M_z = \frac{2Gm\rho R^4 h_0}{L^3} \int_0^{2\pi} (1 + 2A \cos(2\omega_1 t - \varphi_1)) \sin(2\omega_1 t - 2\theta) d\theta$$

Второй интеграл берётся за период, поэтому для функции $\sin(2\omega_1 t - 2\theta)$ он равен нулю.

Перейдём к последнему интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\omega_1 t - \varphi_1) \sin(2\omega_1 t - 2\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_1 t - 2\theta - \varphi_0) \sin(2\omega_1 t - 2\theta) d\theta$$

Воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Получим:

$$M_z = \frac{2Gm\rho R^4 h_0 A}{L^3} \int_0^{2\pi} [\sin(4\omega_1 t - 4\theta - \varphi_0) + \sin \varphi_0] d\theta$$

Окончательно:

Ответ:

$$M_z = \frac{4\pi Gm\rho R^4 h_0 A \sin \varphi_0}{L^3}$$

C1 0.80 Найдите орбитальную угловую скорость вращения $\omega_{\text{синх}}$ и расстояние $L_{\text{синх}}$ между Землёй и Луной при синхронном вращении. Выразите ответы через $m, M, R, G, L_0, \Omega_0$ и найдите их численные значения.

Примечание: при синхронном вращении моментом импульса Земли, связанным с вращением вокруг ее оси, можно пренебречь.

Воспользуемся законом сохранения момента импульса, который обозначим за K :

$$K = I\Omega_0 + \frac{mML_0^2\omega_0}{M+m} = const$$

где $I = 2MR^2/5$ - момент инерции Земного шара относительно диаметра.
В установившемся режиме $\Omega = \omega = \omega_{\text{синх}}$, поэтому:

$$K = \omega_{\text{синх}} \left(I + \frac{mML_{\text{синх}}^2}{m+M} \right)$$

Поскольку при синхронном вращении Землю можно считать материальной точкой:

$$K \approx \frac{mML_{\text{синх}}^2\omega_{\text{синх}}}{m+M}$$

Используя соотношение

$$\omega^2 = \frac{G(M+m)}{L^3}$$

получим:

$$K \approx \frac{G^{2/3}Mm}{(m+M)^{1/3}\omega_{\text{синх}}^{1/3}}$$

откуда окончательно:

Ответ:

$$\omega_{\text{синх}} \approx \frac{G^2 m^3 M^3}{(M+m) \left(\frac{2MR^2\Omega_0}{5} + \frac{mM}{m+M} \sqrt{G(M+m)L_0} \right)^3} \approx 1,376 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

$$L_{\text{синх}} = \frac{(m+M) \left(\frac{2MR^2\Omega_0}{5} + \frac{mM}{m+M} \sqrt{G(M+m)L_0} \right)^2}{Gm^2M^2} \approx 5,971 \cdot 10^8 \text{ м}$$

C2 ^{0.70} Расстояние между Землей и Луной увеличивается со скоростью $\dot{L}_0 = 1$ см/год.

Найдите величину среднего углового ускорения Земли $\dot{\Omega}_0$.

Выразите ответ через $m, M, R, G, L_0, \Omega_0, \dot{L}_0$ и найдите его численное значение.

Момент импульса системы K с помощью связи ω и L приводится к виду:

$$K = I\Omega + \frac{mML^2}{m+M} \sqrt{\frac{G(m+M)}{L^3}}$$

Дифференцируя, находим:

$$I\dot{\Omega} + \frac{mM}{2(m+M)} \sqrt{\frac{G(m+M)}{L}} \dot{L} = 0$$

откуда:

Ответ:

$$\dot{\Omega}_0 = -\frac{5m\dot{L}_0}{4(m+M)R^2} \sqrt{\frac{G(m+M)}{L_0}} \approx -1,22 \cdot 10^{-22} \text{ с}^{-1}$$

C3 ^{0.80} Найдите численные значения ω_0 и γ .

В пункте В5 было получено, что положение прилива отстаёт от Луны на угол $\varphi_0/2$ по направлению вращения Луны относительно Земли. Тогда имеем:

$$2\beta = \arctan \frac{-4\omega_1\gamma}{\omega_0^2 - 4\omega_1^2} = -\varphi_0$$

Также для разницы высот прилива и отлива имеем:

$$\Delta h = h_{\text{пр}} - h_{\text{от}} = 4Ah_0$$

или, после подстановки выражения для A :

$$\Delta h = \frac{6Gmh_0}{L_0^3 \sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)^2 + 16\omega_1^2\gamma^2}} = \frac{6Gmh_0 \cos 2\beta}{L_0^3 (\omega_0^2 - 4\omega_1^2)}$$

Находим:

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{4\omega_1^2 + \frac{6Gmh_0 \cos 2\beta}{L_0^3 \Delta h}} \approx 1,664 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1} \quad \gamma = \frac{3Gmh_0 \sin 2\beta}{2(-\omega_1)L_0^3 \Delta h} \approx 3,025 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

C4 ^{0.50} В рамках описанной модели найдите угловое ускорение Земли $\dot{\Omega}_{0(\text{мод})}$, которое получается из результатов пункта В6.

Сравните его со значением $\dot{\Omega}_0$, полученным в пункте С2 и сделайте вывод о применимости рассматриваемой модели (считайте модель применимой, если Ω_0 и $\Omega_{0(\text{мод})}$ отличаются не более, чем в 10 раз).

Из уравнения динамики вращательного движения относительно центра масс получим:

$$I\dot{\Omega} = M_z = \frac{4\pi Gm\rho R^4 h_0 A \sin \varphi_0}{L^3}$$

Далее обратим внимание, что $h_0 A = \Delta h/4$, а $\varphi_0 = -2\theta$. Тогда имеем:

Ответ:

$$\dot{\Omega}_{0(\text{мод})} = -\frac{5\pi Gm\rho R^2 \Delta h \sin 2\theta}{2ML_0^3} = -1,16 \cdot 10^{-22} \text{ с}^{-1}$$

Рассматриваемая модель даёт величину нужного порядка и является применимой.

C5^{0.70} Оцените численное значение τ_2 . Ответ выразите в годах.

После перехода к режиму синхронного вращения можно считать, что:

$$\omega = const \quad L = const \quad \omega_0^2 \gg \omega_1^2$$

Поэтому:

$$I\dot{\Omega} = M_z = \frac{4\pi Gm\rho R^4 h_0 A \sin \varphi_0}{L^3} \approx \frac{4\pi Gm\rho R^4 h_0}{L_{\text{синх}}^3} \cdot \frac{3Gm}{2L_{\text{синх}}^3 \omega_0^2} \cdot \frac{4(\omega_{\text{синх}} - \Omega)\gamma}{\omega_0^2}$$

откуда:

$$d\tau_2 = -\frac{d\Omega}{\Omega - \omega_{\text{синх}}} \cdot \frac{ML_{\text{синх}}^6 \omega_0^4}{120\pi G^2 m^2 \rho R^2 h_0 \gamma}$$

откуда:

Ответ:

$$\tau_2 \approx \frac{ML_{\text{синх}}^6 \omega_0^4}{120\pi G^2 m^2 \rho R^2 h_0 \gamma} \approx 3,14 \cdot 10^{12} \text{ лет}$$