

A1 0.30 Определите момент инерции системы из стержня и сфер относительно оси вращения. Ответ выразите через m и l .

Момент инерции каждой сферы относительно оси вращения равен ml^2 , поскольку их размерами можно пренебречь. Исходный стержень эквивалентен двум другим с массой $2m$ и длиной l . Момент инерции стержня массой M и длиной L относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец, равен:

$$I_{\text{ст}} = \frac{ML^2}{3}$$

Тогда момент инерции I системы относительно оси вращения равен:

Ответ:

$$I = \frac{10ml^2}{3}$$

A2 0.50 Выразите угловую скорость ω_{i+1} системы после столкновения с $i + 1$ -ым вылетевшим шариком через ω_i , v и l .

Вспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса относительно оси вращения:

$$\begin{cases} E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega_i^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega_{i+1}^2}{2} \\ L = mvl + I\omega_i = mul + I\omega_{i+1} \end{cases}$$

Здесь u - скорость налетающего шарика сразу после удара, по направлению совпадающая со скоростью v . Исключим из системы u :

$$u = v - \frac{I(\omega_{i+1} - \omega_i)}{ml} \Rightarrow I(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2) = v^2 - \left(v - \frac{I(\omega_{i+1} - \omega_i)}{ml}\right)^2$$

Сокращая корень $\omega_{i+1} = \omega_i$, получим:

$$\omega_{i+1} \left(1 + \frac{I}{ml^2}\right) + \omega_i \left(1 - \frac{I}{ml^2}\right) = \frac{2v}{l}$$

Таким образом:

Ответ:

$$\omega_{i+1} = \frac{7\omega_i}{13} + \frac{6v}{13l}$$

A3 0.20 Чему равна ω_1 ? Ответ выразите через v и l .

Поскольку $\omega_0 = 0$, находим:

Ответ:

$$\omega_1 = \frac{6v}{13l}$$

A4 0.20 Выразите ω^* через v и l .

Приравнивая ω_{i+1} и ω_i , находим:

Ответ:

$$\omega^* = \frac{v}{l}$$

A5 0.60

Решив рекуррентное уравнение, полученное в пункте **A1**, получите явное выражение для ω_i . Ответ выразите через i , v и l .

Подсказка: воспользуйтесь переменной $\omega'_i = \omega_i - v/l$.

Уравнение, полученное в пункте A1, приводится к следующему виду:

$$13 \left(\omega_{i+1} - \frac{v}{l} \right) = 7 \left(\omega_i - \frac{v}{l} \right)$$

Вводя переменную $\omega'_i = \omega_i - v/l$, получим:

$$13\omega'_{i+1} = 7\omega'_i$$

Откуда:

$$\omega'_i = \omega'_1 \cdot \left(\frac{7}{13} \right)^{i-1}$$

Поскольку $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 6v/(13l)$. Тогда $\omega'_1 = -7v/(13l)$, откуда :

$$\omega'_i = -\frac{v}{l} \left(\frac{7}{13} \right)^i$$

и окончательно

Ответ:

$$\omega_i = \frac{v}{l} \left(1 - \left(\frac{7}{13} \right)^i \right)$$

A6 0.20

Каким будет предельное значение ω^* для такой системы?

Обратим внимание, что если в рекуррентном уравнении, полученном в пункте **A1**, положить $\omega_{i+1} = \omega_i$, то при любых значениях момента инерции I получится значение:

Ответ:

$$\omega^* = \frac{v}{l}$$

B1 1.00

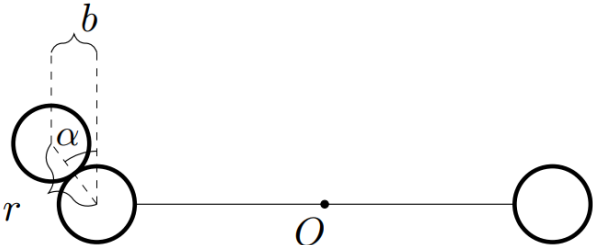
При каком значении параметра k_0 скорость первого вылетевшего шарика сразу после столкновения со сферой будет направлена горизонтально?

Пусть u - скорость вылетающего шарика сразу после удара. Поскольку она направлена горизонтально - сразу после удара момент импульса вылетающего шарика относительно оси вращения равен нулю.

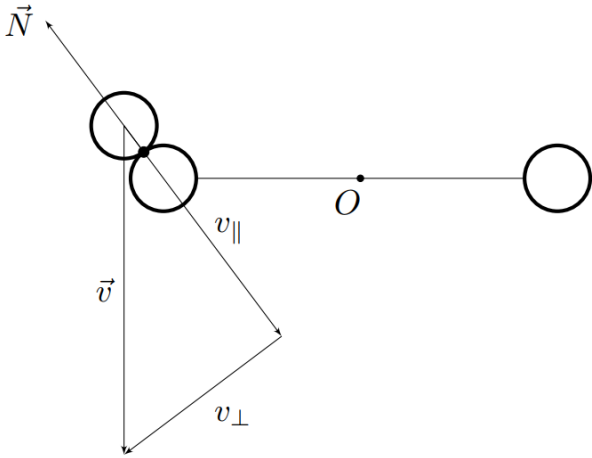
Тогда законы сохранения энергии и момента импульса записываются следующим образом:

$$\begin{cases} E = \frac{mv^2}{2} = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \\ L = mvl = I\omega_1 \end{cases}$$

Явно рассмотрим столкновение вылетающего шарика и сферы. Обратим внимания, что если α - угол между линией центров и вертикалью, то $k = \sin \alpha$.



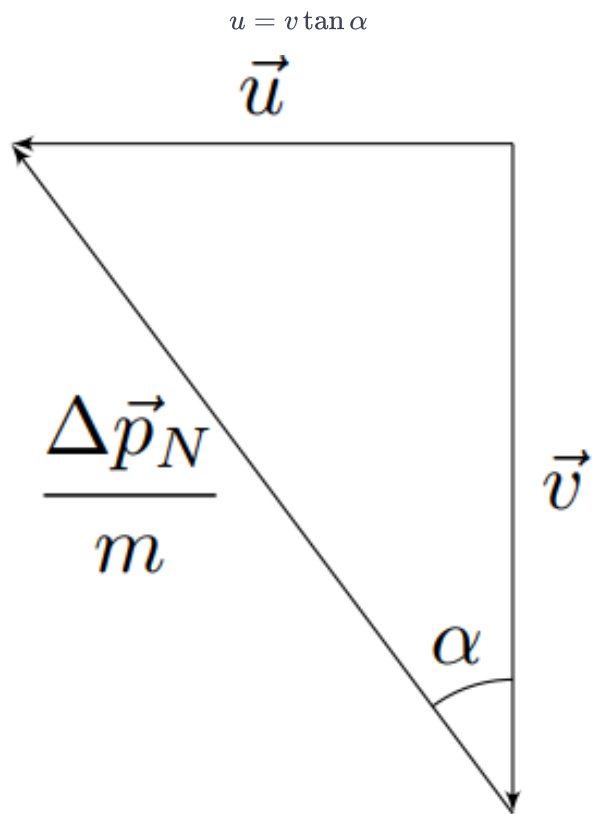
Поскольку трения нет - сила взаимодействия между ними направлена вдоль линии центров. Тогда в процессе удара компонента скорости вылетающего шарика, перпендикулярная линии центров, остаётся постоянной и равной $v_{\perp} = v \sin \alpha$



Вспользуемся сохранением компоненты скорости $v_{\perp}$.
Сразу после удара вектор скорости шарика $\vec{u}$ равен:

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{\Delta \vec{p}_N}{m}$$

где $\Delta \vec{p}_N$ - импульс силы реакции, действующей на шарик со стороны сферы.
Поскольку $\Delta \vec{p}_N$ направлен вдоль линии центров, из рисунка находим:



Подставляя значение u систему уравнений из законов сохранения, получим:

$$v^2 = \frac{I\omega_1^2}{m} + u^2 = \frac{I}{m} \left(\frac{mvl}{I} \right)^2 + v^2 \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 1 - \frac{ml^2}{I}$$

Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$, находим:

Ответ:

$$k_0 = \sqrt{\frac{I - ml^2}{2I - ml^2}} = \sqrt{\frac{7}{17}}$$

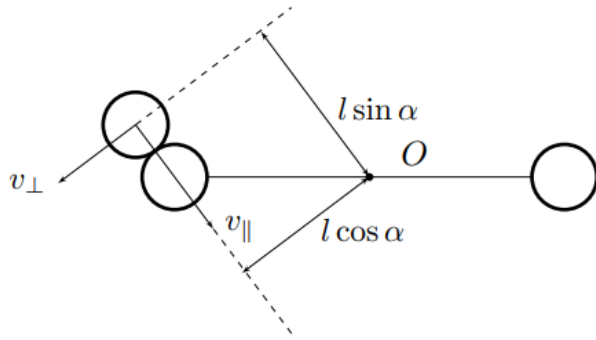
B2^{1.00}

Выразите угловую скорость ω_{i+1} системы после столкновения с $i + 1$ -ым вылетевшим шариком через ω_i , v , l и k .

Разложим скорость вылетающего шарика на компоненты скорости $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$, направленные соответственно вдоль и перпендикулярно линии центров.
Момент импульса шарика относительно точки O равен:

$$\vec{L}_O = m[\vec{v} \times \vec{r}] = m[\vec{v}_{\parallel} \times \vec{r}] + m[\vec{v}_{\perp} \times \vec{r}]$$

На рисунке обозначены плечи скоростей $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ относительно оси вращения, соответственно равные $l \cos \alpha$ и $l \sin \alpha$.



Скорость шарика сразу после удара также разложим на $u_{\parallel}$ и $u_{\perp}$. Их направления выберем теми же, что и у $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ соответственно. Запишем законы сохранения энергии и момента импульса относительно оси вращения:

$$\begin{cases} E = \frac{I\omega_i^2}{2} + \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{2} = \frac{I\omega_{i+1}^2}{2} + \frac{m(u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)}{2} \\ L = I\omega_i + mv_{\parallel}l \cos \alpha + mv_{\perp}l \sin \alpha = I\omega_{i+1} + mu_{\parallel}l \cos \alpha + mu_{\perp}l \sin \alpha \end{cases}$$

Поскольку $v_{\perp} = u_{\perp}$, а $v_{\parallel} = v \cos \alpha$, перепишем систему более компактно:

$$\begin{cases} I\omega_i^2 + mv^2 \cos^2 \alpha = I\omega_{i+1}^2 + mu_{\parallel}^2 \\ I\omega_i + mvl \cos^2 \alpha = I\omega_{i+1} + mu_{\parallel}l \cos \alpha \end{cases}$$

Исключим из системы $u_{\parallel}$:

$$u_{\parallel}^2 = v^2 \cos^2 \alpha - \frac{I(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2)}{m} = \left(v \cos \alpha - \frac{I(\omega_{i+1} - \omega_i)}{ml \cos \alpha} \right)^2$$

Раскрывая скобки и сокращая множитель $\omega_{i+1} - \omega_i$, получим:

$$\frac{2v}{l} = \omega_{i+1} \left(1 + \frac{I}{ml^2 \cos^2 \alpha} \right) - \omega_i \left(\frac{I}{ml^2 \cos^2 \alpha} - 1 \right)$$

Ответ:

$$\omega_{i+1} = \frac{6v(1 - k^2)}{l(13 - 3k^2)} + \omega_i \cdot \frac{7 + 3k^2}{13 - 3k^2}$$

B3^{0.20}

Чему равна ω_1 ? Ответ выразите через v_0 , l и k .

Поскольку $\omega_0 = 0$, находим:

Ответ:

$$\omega_1 = \frac{6v(1 - k^2)}{l(13 - 3k^2)}$$

B4^{0.80}

Решив рекуррентное уравнение, полученное в пункте **B2**, получите явное выражение для ω_i . Ответ выразите через i , v и l .

Вновь введём переменную $\omega'_i = \omega_i - v/l$ и получим:

$$\omega'_{i+1} \left(1 + \frac{I}{ml^2 \cos^2 \alpha} \right) = \omega'_i \left(\frac{I}{ml^2 \cos^2 \alpha} - 1 \right)$$

откуда после подстановки I :

$$\omega'_{i+1} = \omega'_i \left(\frac{7 + 3k^2}{13 - 3k^2} \right) \Rightarrow \omega'_i = \omega'_1 \left(\frac{7 + 3k^2}{13 - 3k^2} \right)^{i-1}$$

Для ω'_1 имеем:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{v}{l} = -\frac{v(7 + 3k^2)}{l(13 - 3k^2)}$$

Таким образом:

$$\omega'_i = \frac{v}{l} \left(\frac{7 + 3k^2}{13 - 3k^2} \right)^i$$

и окончательно:

Ответ:

$$\omega_i = \frac{v}{l} \left(1 - \left(\frac{7 + 3k^2}{13 - 3k^2} \right)^i \right)$$

C1^{0.50} Найдите, при каких значениях параметра α система в режиме сухого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.

Для удобства решения найдём сначала угловую скорость системы $\omega^\uparrow$ после первого столкновения с шариком. Подставляя $\omega_i = 0$ и $\omega_{i+1} = \omega^\uparrow$ в рекуррентное уравнение, получим:

$$\omega^\uparrow = \frac{2\varepsilon\omega_0}{1 + \varepsilon}.$$

Временные зависимости $\omega(t)$ для режимов вязкого трения можно найти, как в решении к пунктам **C5** и **C7**.

Случай сухого трения.

Кинетическая энергия вращательного движения системы должна быть потеряна на трение за половину оборота, т.е.:

$$\frac{I}{2} \omega^{\uparrow 2} > \pi \alpha I \implies \alpha < \frac{\omega^{\uparrow 2}}{2\pi} = \frac{2\varepsilon^2 \omega_0^2}{\pi(1 + \varepsilon)^2}.$$

Ответ:

$$\alpha < \frac{2\varepsilon^2 \omega_0^2}{\pi(1 + \varepsilon)^2}$$

C2^{0.50} Найдите, при каких значениях параметра β система в режиме линейного вязкого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.

Случай линейного вязкого трения.

Поскольку $\omega(t) = \omega^\uparrow e^{-\beta t}$, то предельный угол поворота системы после первого соударения составит:

$$\varphi = \int_0^{+\infty} \omega^\uparrow e^{-\beta t} dt = \frac{\omega^\uparrow}{\beta}.$$

Этот угол должен быть больше π , поэтому:

$$\beta < \frac{\omega^\uparrow}{\pi} = \frac{2\varepsilon\omega_0}{\pi(1 + \varepsilon)}$$

Ответ:

$$\beta < \frac{2\varepsilon\omega_0}{\pi(1 + \varepsilon)}$$

C3^{0.50} Найдите, при каких значениях параметра γ система в режиме квадратичного вязкого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.

Случай квадратичного вязкого трения.

Поскольку интеграл вида $\int \frac{1}{x} dx$ расходится при $x \rightarrow +\infty$, то при любом значении γ система сможет совершить один оборот за конечное, пусть и экспоненциально большое время. Таким образом, γ может быть произвольной положительной величиной.

Ответ:

$$\gamma < +\infty$$

Примечание: Так как в действительности в пределе малых угловых скоростей вязкое трение переходит в линейный режим, то реально значение γ имеет верхний предел, однако этим мы здесь пренебрегаем.

C4^{0.70}

Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\bar{\omega}_1$ в режиме сухого трения. Выразите ответ через ε , α и ω_0 .

Приравнивая изменение кинетической энергии системы за один оборот к потерям на трение, имеем:

$$\frac{I}{2}\omega^{\uparrow 2} - \frac{I}{2}\omega^{\downarrow 2} = \pi\alpha I \implies \omega^{\uparrow 2} - \omega^{\downarrow 2} = 2\pi\alpha.$$

Поскольку в режиме сухого трения движение системы происходит в постоянным угловым ускорением, средняя угловая скорость $\bar{\omega}$ будет равна среднему арифметическому $\omega^{\uparrow}$ и $\omega^{\downarrow}$. Для удобства введём ещё одну величину:

$$\Delta\omega = \frac{\omega^{\uparrow} - \omega^{\downarrow}}{2},$$

тогда, добавив рекуррентное уравнение, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \bar{\omega}\Delta\omega = \frac{\pi\alpha}{2} \\ \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{\varepsilon} = \omega_0 \end{cases} \implies \bar{\omega}^2 - \omega_0\bar{\omega} + \frac{\pi\alpha}{2\varepsilon} = 0.$$

Это – квадратное уравнение, корни которого:

$$\bar{\omega}_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}}}{2}.$$

Из физических соображений ясно, что необходимо взять бóльший корень $\bar{\omega}_+$. Итак:

Ответ:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left[\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}} \right]$$

C5^{0.50}

Найдите стационарное значение угловой скорости $\omega_2^{\uparrow}$ системы непосредственно после очередного столкновения с шариком в режиме линейного вязкого трения.

Случай линейного вязкого трения.

Уравнение на угловую скорость между столкновениями с шариком запишется в виде:

$$\dot{\omega} = -\beta\omega.$$

Его решение с начальным условием $\omega(t=0) = \omega^{\uparrow}$ имеет вид:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\beta dt \implies \omega = Ce^{-\beta t}, \omega(t=0) = C = \omega^{\uparrow} \implies \omega(t) = \omega^{\uparrow} e^{-\beta t}.$$

Тогда время T следующего столкновения с шариком определится из условия:

$$\pi = \int_0^T \omega(t) dt = \int_0^T \omega^{\uparrow} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta T}) \omega^{\uparrow}.$$

Так как угловая скорость системы $\omega^{\downarrow}$ непосредственно перед столкновением с шариком равна:

$$\omega^{\downarrow} = \omega^{\uparrow} e^{-\beta T},$$

то имеем в итоге:

$$\omega^{\uparrow} - \omega^{\downarrow} = \pi\beta.$$

Подставляя это в рекуррентное уравнение, получим:

$$\omega^{\uparrow} (1 + \varepsilon^{-1}) + (\omega^{\uparrow} - \pi\beta) (1 - \varepsilon^{-1}) = 2\omega_0 \implies \omega^{\uparrow} = \omega_0 - \frac{\pi\beta}{2} (\varepsilon^{-1} - 1).$$

Ответ:

$$\omega^{\uparrow} = \omega_0 - \frac{\pi\beta}{2}(\varepsilon^{-1} - 1)$$

C6^{0.40}

Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\bar{\omega}_2$ в режиме линейного вязкого трения.

Из результатов, полученных в предыдущем пункте, точное значение средней угловой скорости равно:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi\beta}{-\ln\left(1 - \frac{\pi\beta}{\omega^{\uparrow}}\right)} = \frac{\pi\beta}{\ln(2\varepsilon\omega_0 - \pi\beta(1 - \varepsilon)) - \ln(2\varepsilon\omega_0 - \pi\beta(1 + \varepsilon))}.$$

Ответ:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{\pi\beta}{\ln(2\varepsilon\omega_0 - \pi\beta(1 - \varepsilon)) - \ln(2\varepsilon\omega_0 - \pi\beta(1 + \varepsilon))}$$

C7^{0.50}

Найдите стационарное значение угловой скорости $\omega_3^{\uparrow}$ системы непосредственно после очередного столкновения с шариком в режиме квадратичного вязкого трения.

Случай квадратичного вязкого трения.

Уравнение на угловую скорость между столкновениями с шариком запишется в виде:

$$\dot{\omega} = -\gamma\omega^2.$$

Его решение с начальным условием $\omega(t = 0) = \omega^{\uparrow}$ имеет вид:

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -\gamma \, dt \implies \frac{1}{\omega} = \gamma t + C, \, \omega(t = 0) = \frac{1}{C} = \omega^{\uparrow} \implies \omega(t) = \frac{1}{\gamma t + \frac{1}{\omega^{\uparrow}}} = \frac{\omega^{\uparrow}}{1 + \gamma\omega^{\uparrow}t}.$$

Тогда время T следующего столкновения с шариком определится из условия:

$$\pi = \int_0^T \omega(t) \, dt = \int_0^T \frac{\omega^{\uparrow}}{1 + \gamma\omega^{\uparrow}t} \, dt = \frac{1}{\gamma}\ln(1 + \gamma\omega^{\uparrow}T) \implies T = \frac{e^{\pi\gamma} - 1}{\gamma\omega^{\uparrow}}.$$

Угловая скорость системы $\omega^{\downarrow}$ непосредственно перед столкновением с шариком составит:

$$\omega^{\downarrow} = \omega(T) = \omega^{\uparrow}e^{-\pi\gamma}.$$

Подставляя это в рекуррентное уравнение, имеем:

$$\omega^{\uparrow}(1 + \varepsilon^{-1}) + \omega^{\uparrow}e^{-\pi\gamma}(1 - \varepsilon^{-1}) = 2\omega_0 \implies \omega^{\uparrow} = \frac{2\omega_0\varepsilon}{1 - e^{-\pi\gamma} + \varepsilon(1 + e^{-\pi\gamma})}.$$

Ответ:

$$\omega^{\uparrow} = \frac{2\omega_0\varepsilon}{1 - e^{-\pi\gamma} + \varepsilon(1 + e^{-\pi\gamma})}$$

C8^{0.40}

Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\bar{\omega}_3$ в режиме квадратичного вязкого трения.

Из результатов, полученных в предыдущем пункте, точное значение средней угловой скорости равно:

$$\bar{\omega}_3 = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi\gamma\omega^{\uparrow}}{e^{\pi\gamma} - 1} = \frac{\pi\varepsilon\gamma\omega_0}{2\operatorname{sh}\frac{\pi\gamma}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{\pi\gamma}{2} + \varepsilon\operatorname{ch}\frac{\pi\gamma}{2}\right)}.$$

Ответ:

$$\bar{\omega}_3 = \frac{\pi\varepsilon\gamma\omega_0}{2\operatorname{sh}(\pi\gamma/2)\left[\operatorname{sh}(\pi\gamma/2) + \varepsilon\operatorname{ch}(\pi\gamma/2)\right]}$$