

A1^{0.60} Линейное напряжение между выводами a и b можно представить в виде $\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}'_0 \cos(\omega t - \Delta\varphi)$, $\mathcal{E}'_0 > 0$. Найдите $\mathcal{E}'_0$ и $\Delta\varphi$. Выразите ответ через $\mathcal{E}_0$.

$$\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_0 \left(\cos(\omega t) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

Применив формулу разности косинусов, получим:

$$\mathcal{E}_{ab} = 2\mathcal{E}_0 \left(\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = -\sqrt{3}\mathcal{E}_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Заменяем синус на требуемый косинус:

$$\mathcal{E}_{ab} = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Примечание.

В условии не была указана полярность $\mathcal{E}_{ab}$, поэтому возможен вариант $\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a$. В этом случае знак косинуса в окончательно выражении поменяется, что соответствует сдвигу фазы косинуса на π :

$$\mathcal{E}_{ab} = \sqrt{3}\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right).$$

Ответ:

$$\mathcal{E}'_0 = \sqrt{3}\mathcal{E}_0$$
$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{6} \quad \text{либо} \quad \Delta\varphi = \frac{5\pi}{6}$$

A2^{1.00} Пусть каждый из элементов нагрузки (Z_a , Z_b , Z_c) представляет собой последовательно соединенные резистор $R = 9$ кОм и конденсатор $C = 2 \cdot 10^{-7}$ Ф. Найдите амплитуды тока через линейный провод I_a и нулевой провод I_0 (формулу и численное значение).

Воспользуемся методом комплексных амплитуд. Будем обозначать комплексные амплитуды чертой над соответствующими величинами. Запишем 2-й закон Кирхгофа для контура с током I_a :

$$\mathcal{E}_a = \overline{I}_a(R + r) - \overline{I}_a \frac{i}{\omega C} + \overline{I}_0 r; \tag{1}$$

Аналогично для I_b , I_c :

$$\mathcal{E}_b = \overline{I}_a(R + r) - \overline{I}_b \frac{i}{\omega C} + \overline{I}_0 r; \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_c = \overline{I}_a(R + r) - \overline{I}_c \frac{i}{\omega C} + \overline{I}_0 r. \tag{3}$$

Также запишем 1-й закон Кирхгофа:

$$\overline{I}_0 = \overline{I}_a + \overline{I}_b + \overline{I}_c. \tag{4}$$

Выразим $\overline{I}_a$, $\overline{I}_b$, $\overline{I}_c$ из (1), (2), (3) соответственно и подставим в (4):

$$\overline{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_a - \overline{I}_0 r}{R + r - \frac{i}{\omega C}} + \frac{\mathcal{E}_b - \overline{I}_0 r}{R + r - \frac{i}{\omega C}} + \frac{\mathcal{E}_c - \overline{I}_0 r}{R + r - \frac{i}{\omega C}}.$$

Так как

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_c = 0,$$

получим

$$\overline{I}_0 = 0.$$

С учетом этого имеем ответ для $\overline{I}_a$:

$$\overline{I}_a = \frac{\mathcal{E}_0}{(R + r) - \frac{i}{\omega C}},$$
$$|\overline{I}_a| = I_a = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R + r)^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}.$$

Ответ:

$$I_a = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R+r)^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \approx 14,6 \text{ мА};$$

$$I_0 = 0.$$

A3^{0.40}

Найдите коэффициент полезного действия схемы из пункта A2 η (формулу и численное значение). Коэффициентом полезного действия считайте отношение средней мощности, выделяющейся на нагрузке, к средней мощности, выделяющейся во всей цепи.

Мощность в схеме выделяется только на резисторах. Полезная мощность выделяется на резисторах R . Пусть для этого резистора сдвиг фаз равен $\Delta\varphi_1$. Мощность на резисторе a :

$$P_a = |\overline{I_a}|^2 \cos^2(\omega t - \Delta\varphi_1) R = \frac{1}{2} |\overline{I_a}|^2 R (1 + \cos(2(\omega t - \Delta\varphi_1))).$$

Так как среднее $\cos(2(\omega t - \Delta\varphi_1))$ за период равно 0, средняя за период мощность:

$$\langle P_a \rangle = \frac{1}{2} |\overline{I_a}|^2 R.$$

Видно, что сдвиг фаз $\Delta\varphi_1$ не влияет на $\langle P_a \rangle$, а значит:

$$\langle P_a \rangle = \langle P_b \rangle = \langle P_c \rangle.$$

Итого полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = \frac{3}{2} |\overline{I_a}|^2 R.$$

Аналогично находим общую мощность в цепи:

$$P_{\text{вся}} = \frac{3}{2} |\overline{I_a}|^2 (R + r).$$

По определению, данному в условии:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{вся}}} = \frac{R}{R + r} \approx 64,3\%.$$

Ответ:

$$\eta = \frac{R}{R + r} \approx 64,3\%.$$

A4^{1.00}

Пусть теперь нагрузка несимметричная: элементы Z_b и Z_c представляют собой резисторы с сопротивлением R , а элемент Z_a – конденсатор с емкостью $C_1 = 10^{-9}$ Ф. Найдите численное значение коэффициента полезного действия схемы η_1 в этом случае. Получать аналитическое выражение для η_1 не требуется. Воспользуйтесь численными данными из пункта A2.

Модуль импеданса конденсатора:

$$|Z_a| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \approx 3183 \text{ кОм}.$$

Заметим, что $|Z_a| \gg R$, поэтому при расчете токов током через конденсатор можно пренебречь. Аналогично пункту A2 напишем законы Кирхгофа для цепи:

$$\overline{I_0} = \overline{I_b} + \overline{I_c}; \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \right) = \overline{I_b}(R + r) + \overline{I_0}r; \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \right) = \overline{I_c}(R + r) + \overline{I_0}r. \tag{3}$$

Сложим (2) и (3) и воспользуемся (1). Таким образом найдем $\overline{I_0}$:

$$\overline{I_0} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R+3r}.$$

Подставив найденное $\overline{I_0}$ в (2) и (3), находим $\overline{I_b}$ и $\overline{I_c}$:

$$\begin{aligned}\overline{I_b} &= \frac{\mathcal{E}_0}{R+r} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{r}{R+3r} - \frac{1}{2} \right) \right); I \\ \overline{I_c} &= \frac{\mathcal{E}_0}{R+r} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{r}{R+3r} - \frac{1}{2} \right) \right);\end{aligned}$$

Выражения для модулей:

$$\begin{aligned}|\overline{I_0}| &= \frac{\mathcal{E}_0}{R+3r} \approx 12,92\text{мА}; \\ |\overline{I_b}| = |\overline{I_c}| &= \frac{\mathcal{E}_0}{R+r} \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{r}{R+3r} - \frac{1}{2} \right)^2} \approx 20,23\text{мА};\end{aligned}$$

Находим средние полезную и общую мощности:

$$\begin{aligned}P_{\text{пол}} &= 2\frac{1}{2}|\overline{I_b}|^2 R; \\ P_{\text{вся}} &= 2\frac{1}{2}|\overline{I_b}|^2 (R+r) + \frac{1}{2}|\overline{I_0}|^2 r; \\ \eta_1 &= \frac{2|\overline{I_b}|^2 R}{2|\overline{I_b}|^2 (R+r) + |\overline{I_0}|^2 r} \approx 59,9\%.\end{aligned}$$

Ответ:

$$\eta_1 \approx 59,9\%.$$

В1 0.60 Пусть в одной из квадратных рамок со стороной a в данный момент времени течет ток I_0 . Найдите магнитное поле B_0 в центре квадрата, создаваемое только этой рамкой.

Для начала рассмотрим отрезок с током I . Найдем поле в точке, расположенной на расстоянии h от прямой, содержащей его. Закон Био-Савара-Лапласа:

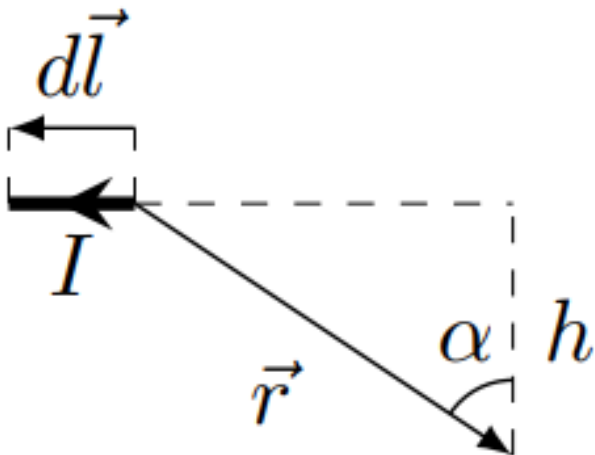
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}.$$

Поле от любого малого фрагмента отрезка поле будет направлено одинаково – по Oz . С учетом этого запишем выражение для проекции поля $d\vec{B}$ на Oz :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{dl \cos(\alpha)}{r^2}.$$

Подставим $dl = \frac{hd\alpha}{\cos^2(\alpha)}$, $r = \frac{h}{\cos(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}dB_z &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi h} \cos(\alpha) d\alpha; \\ B_z &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\alpha) d\alpha; \\ B_z &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi h} (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)).\end{aligned}$$



Для одной стороны квадратной рамки $h = a/2$, $\alpha_2 = -\alpha_1 = \pi/4$. Тогда поле в центре рамки:

$$B_0 = 4 \frac{\mu_0 I_0}{4\pi \frac{a}{2}} \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I_0}{\pi a}.$$

Ответ:

$$B_0 = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I_0}{\pi a}.$$

B2^{1.50}

Будем теперь рассматривать поле, которое создают все три рамки, токи через которые указаны во введении. Докажите, что в этом случае магнитное поле вращается с постоянной угловой скоростью в плоскости xy , то есть его модуль постоянен и равен B_1 , а угол с осью x $\psi = \omega t + \psi_0$ (тогда $B_x = B_1 \cos \psi$, $B_y = B_1 \sin \psi$). Найдите B_1 и ψ_0 . Выразите ответ через B_0 .

Получим проекцию поля от трех рамок на Ox :

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \cos(\omega t) + B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + B_0 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \\ &= B_0 \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Применим формулу суммы косинусов:

$$B_0 \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \pi) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{3}{2} B_0 \cos(\omega t).$$

Аналогично можно рассчитать проекцию суммарного поля на Oy :

$$\begin{aligned} B_y &= B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - B_0 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \\ B_y &= \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \sin(\omega t - \pi) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} B_0 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Оба выражения приводят к ответу:

$$B_1 = \frac{3}{2} B_0; \quad \psi_0 = 0.$$

Ответ:

$$B_1 = \frac{3}{2} B_0; \quad \psi_0 = 0.$$

Альтернативное решение.

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ – единичные вектора осей x, y соответственно.

Запишем с помощью них векторные выражения для полей от трех рамок:

$$\begin{aligned} \vec{B}_a &= B_0 \vec{e}_x \cos(\omega t); \\ \vec{B}_b &= B_0 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \\ \vec{B}_c &= B_0 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Перейдем к комплексным амплитудам:

$$\begin{aligned} \vec{B}_a &= B_0 \vec{e}_x e^{i\omega t}; \\ \vec{B}_b &= B_0 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) e^{i\omega t} e^{-i\frac{2\pi}{3}}; \\ \vec{B}_c &= B_0 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) e^{i\omega t} e^{-i\frac{4\pi}{3}} = B_0 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) e^{i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_c = B_0 e^{i\omega t} \left(\vec{e}_x \left(1 - \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} \right) - \sqrt{3} i \vec{e}_y \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2i} \right) = \\ &= B_0 e^{i\omega t} \left(\vec{e}_x \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) - \sqrt{3} i \vec{e}_y \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \\ &= B_0 e^{i\omega t} \left(\frac{3}{2} \vec{e}_x - \frac{3}{2} i \vec{e}_y \right). \end{aligned}$$

Взяв действительную часть от выражения выше, получим:

$$\vec{B}_1 = \frac{3}{2} B_0 \left(\vec{e}_x \cos(\omega t) + \vec{e}_y \sin(\omega t) \right).$$

Отсюда следует полученный ранее ответ.

В3 ^{0.40} Маленькая рамка в центре повернута так, что ее нормаль образует угол α с осью x . Найдите магнитный поток через нее в момент времени t . Выразите ответ через B_1, S, α, ω .

Ответ:

$$\Phi = B_1 S \cos(\alpha - \omega t).$$

В4 ^{1.00} Пусть индуктивность рамки L_2 , сопротивление R_2 . Рамка вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , так что $\alpha = \omega_1 t$ ($0 < \omega_1 < \omega$). В установившемся режиме ток в рамке зависит от времени как

$$I(t) = A \cos(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Найдите A, ω_2 и φ_2 . Выразите ответ через параметры рамки, B_1, ω, ω_1 .

Полный поток магнитного поля через рамку создается вращающимся полем и током в рамке I

$$\Phi_t = \Phi + L_2 I$$

Суммарная ЭДС индукции в рамке с током I :

$$\mathcal{E} = \dot{\Phi}_t = -\dot{\Phi} - L_2 \dot{I}.$$

Из закона Ома для рамки $IR_2 = \mathcal{E}$ получим

$$-\dot{\Phi} = L_2 \dot{I} + IR_2$$

Это уравнение формально эквивалентно уравнению для RL -цепи с источником переменного напряжения $-\dot{\Phi}$. Будем записывать колебания в комплексном виде:

$$\Phi = B_1 S e^{i(\omega - \omega_1)t}.$$

Поскольку поток меняется с частотой $\omega_2 = \omega - \omega_1$, с той же частотой будет меняться и ток. ЭДС индукции в рамке:

$$\mathcal{E}(t) = -\dot{\Phi} = -i\omega_2 B_1 S e^{i\omega_2 t}.$$

Подставим зависимость тока от времени в виде $I = \bar{I} e^{i\omega_2 t}$, получим

$$(i\omega_2 L_2 + R_2) \bar{I} = -i\omega_2 B_1 S;$$

$$\bar{I} = -\frac{i(\omega - \omega_1) B_1 S}{i(\omega - \omega_1) L_2 + R_2}.$$

Отсюда получаем ответы

$$A = |\bar{I}| = \frac{B_1 S (\omega - \omega_1)}{\sqrt{R_2^2 + (\omega - \omega_1)^2 L_2^2}};$$
$$\varphi_2 = \pi - \arctan\left(\frac{R_2}{(\omega - \omega_1) L_2}\right).$$

Ответ:

$$\omega_2 = \omega - \omega_1;$$
$$A = \frac{B_1 S (\omega - \omega_1)}{\sqrt{R_2^2 + (\omega - \omega_1)^2 L_2^2}};$$
$$\varphi_2 = \pi - \arctan\left(\frac{R_2}{(\omega - \omega_1) L_2}\right).$$

В5 1.50

Для того, чтобы обеспечить более равномерное вращение ротора, вместо одной рамки будем использовать три рамки, повернутых друг относительно друга на 120° вокруг оси z (то есть если положение одной рамки задается углом α , положения остальных рамок задаются углами $\alpha_2 = \alpha + 2\pi/3$, $\alpha_3 = \alpha + 4\pi/3$). Рамки изолированы друг от друга, их взаимной индукцией можно пренебречь. Докажите, что проекция на ось z момент сил, действующий на конструкцию из трех рамок, постоянен. Найдите ее величину M_z . Выразите ответ через параметры рамки, B_1 , ω , ω_1 .

Магнитный поток вращающегося магнитного поля через i -ю рамку ($i = 1, 2, 3$) равен $\Phi_i = B_1 S \cos(\omega_2 t - \alpha_{0i})$ ($\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{02} = 2\pi/3 = \Delta\alpha$, $\alpha_{03} = 4\pi/3 = 2\Delta\alpha$). Таким образом, магнитный поток через вторую и третью рамку запаздывают на $2\pi/3$ и $4\pi/3$. Тогда токи через эти рамки запаздывают на такую же фазу.

Магнитный момент рамки с током I площадью S

$$m = IS,$$

на i -тую рамку действует момент сил

$$\vec{M}_i = [\vec{m}_i \times \vec{B}].$$

В проекции на Oz :

$$M_{iz} = m_i B_1 \sin(\psi - \alpha_i).$$

Таким образом (обозначения для тока взяты из предыдущего пункта):

$$M_z = B_1 AS (\sin(\omega_2 t) \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \sin(\omega_2 t - \Delta\alpha) \cos(\omega_2 t - \varphi_2 - \Delta\alpha) + \sin(\omega_2 t - 2\Delta\alpha) \cos(\omega_2 t - \varphi_2 - 2\Delta\alpha)).$$

Применим формулу произведения синуса на косинус:

$$M_z = \frac{1}{2} B_1 AS (\sin \varphi_2 + \sin(2\omega_2 t - \varphi_2) + \sin \varphi_2 + \sin(2\omega_2 t - \varphi_2 - 2\Delta\alpha) + \sin \varphi_2 + \sin(2\omega_2 t - \varphi_2 - 4\Delta\alpha))$$

Сумма трех синусов, зависящих от времени, обращается в 0, поэтому

$$M_z = \frac{3}{2} B_1 AS \sin \varphi_2.$$

Подставив φ_2 , A , получим

$$\sin \varphi_2 = \sin \left(\arctan \frac{R_2}{(\omega - \omega_1) L_2} \right) = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega - \omega_1)^2 L_2^2}}.$$

Ответ:

$$M_z = \frac{3}{2} B_1^2 S^2 \frac{(\omega - \omega_1) R_2}{(\omega - \omega_1)^2 L_2^2 + R_2^2}.$$

Альтернативное решение.

Найдем суммарный момент трех рамок с током. Эта задача математически эквивалентна задаче о нахождении суммарного магнитного поля от трех внешних рамок с током. Действительно, магнитный момент каждой следующей рамки повернут на 120° градусов относительно магнитного момента предыдущей рамки, и запаздывает по фазе на $2\pi/3$. Рассмотрим сначала задачу в системе отсчета вращающихся рамок. Тогда если $m_0 = AS$ – амплитуда магнитного момента от одной рамки, то величина суммарного магнитного момента $m_1 = \frac{3}{2} m_0$, а магнитный момент вращается с угловой скоростью ω_2 . При этом начальная фаза магнитного момента равна $-\varphi_2$, поскольку все токи запаздывают относительно магнитного поля на эту фазу. Поскольку сами рамки вращаются с угловой скоростью ω_1 , относительно лабораторной системы отсчета магнитный момент вращается с угловой скоростью $\omega_1 + \omega_2 = \omega$. Угловые скорости магнитного момента и магнитного поля совпадают, поэтому угол между ними остается постоянным. Отсюда следует, что момент сил также постоянен и равен

$$M_z = \frac{3}{2} m_0 B_1 \sin \varphi_2 = \frac{3}{2} AS B_1 \sin \varphi_2.$$

Таким образом, получаем прежний ответ.

В6 1.00

Постройте качественный график зависимости $M_z(\omega_1)$ в диапазоне частот $0 < \omega_1 < \omega$. Укажите координаты характерных точек. Считайте, что $R_2/L_2 < \omega$.

Перепишем выражение для момента сил в виде

$$M = \frac{3}{2} B_1^2 S^2 \frac{R_2}{L_2^2} \frac{1}{(\omega - \omega_1) + \frac{R_2^2}{L_2^2} \frac{1}{(\omega - \omega_1)}}.$$

Максимуму момента отвечает минимум знаменателя

$$(\omega - \omega_1) + \frac{R_2^2}{L_2^2} \frac{1}{(\omega - \omega_1)}.$$

Взяв производную по $\omega - \omega_1$, получим, что экстремуму соответствует

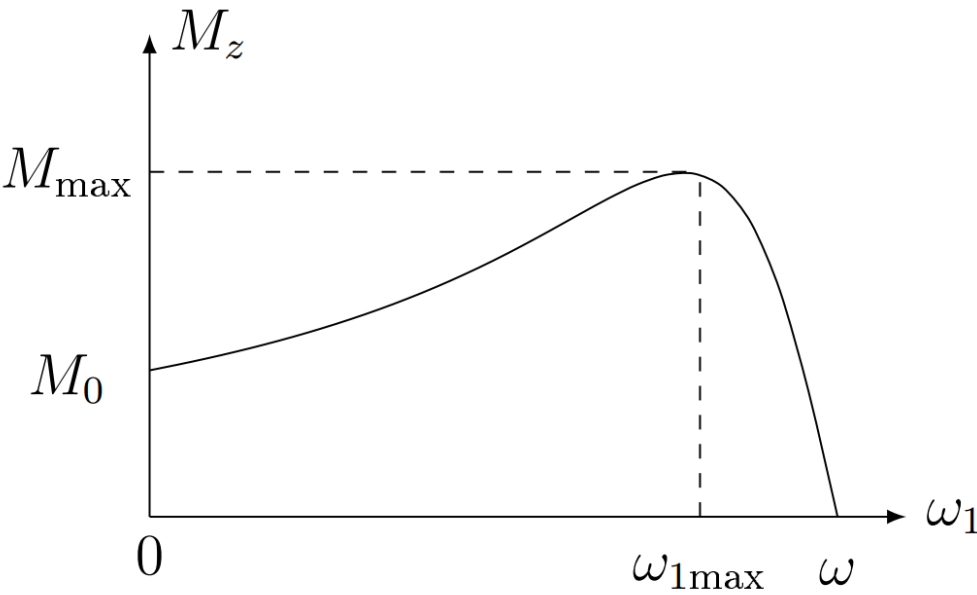
$$\omega - \omega_{1max} = \frac{R_2}{L_2};$$
$$\omega_{1max} = \omega - \frac{R_2}{L_2}.$$

Максимальное значение момента $M_{max} = \frac{3}{4} \frac{B_1^2 S^2}{L_2}$. Любопытно отметить, что M_{max} не зависит от R_2 .

При $\omega_1 = 0$

$$M_0 = \frac{3}{2} B_1^2 S^2 \frac{\omega R_2}{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}.$$

Ответ:



Ответ:

$$\omega_{1max} = \omega - \frac{R_2}{L_2}; \quad M_{max} = \frac{3}{4} \frac{B_1^2 S^2}{L_2}; \quad M_0 = \frac{3}{2} B_1^2 S^2 \frac{\omega R_2}{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}.$$