

A1 0.80 Металлический шар радиуса R помещён в однородное электрическое поле $\vec{E}_0$.

Найдите приобретаемый шаром дипольный момент $\vec{p}$.

Ответ выразите через $\vec{E}_0$, R и электрическую постоянную ϵ_0 .

Электрическое поле внутри шара равняется нулю, а вне шара представляет собой сумму внешнего поля и поля диполя:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

На поверхности шара электрическое поле направлено перпендикулярно поверхности.

Отсюда:

Ответ:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

A2 0.50 Пусть шар расположен в электрическом поле, направленном вдоль оси z , напряжённость которого меняется по закону:

$$\vec{E} \approx (E_0 + kz) \vec{e}_z$$

где E_0 и k — известные величины, причём $kR \ll E_0$.

Найдите силу F_z , действующую на шар.

Ответ выразите через E_0 , k , R и электрическую постоянную ϵ_0 .

По определению диполь представляет собой два точечных заряда $+q$ и $-q$, расположенные на расстоянии l друг от друга.

Пусть $\vec{r}$ - радиус-вектор отрицательного заряда, а $\vec{l}$ - радиус-вектор положительного заряда относительно отрицательного.

Тогда для силы взаимодействия имеем:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{E}(\vec{r}) \right)$$

Если электрическое поле направлено вдоль дипольного момента системы, то, поскольку диполь ориентирован вдоль оси z , сила, действующая на него, направлена вдоль оси z .

Если диполь можно считать точечным

$$E_z(\vec{r} + \vec{l}) - E_z(\vec{r}) = \frac{dE_z}{dz} \cdot l$$

Отсюда для силы получим:

$$F_z = p_z \frac{dE_z}{dz}$$

В нашей задаче поскольку $kR \ll E_0$ - модель электрического диполя хорошо описывает электрическое поле шара.

Подставляя выражение для p_z и $\frac{dE_z}{dz}$, найдём:

Ответ:

$$F_z = 4\pi R^3 \epsilon_0 E_0 k$$

A3 0.20 Найдите величину электрического поля провода $E_{\text{н}}$ на расстоянии r от него. Ответ выразите через λ , r и электрическую постоянную ϵ_0 .

Из теоремы Гаусса имеем:

$$2\pi r L E_{\text{н}} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

откуда:

Ответ:

$$E_{\text{н}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

A4 ^{0.50} Найдите величину и направление (притяжение или отталкивание) силы F , действующей на шар со стороны провода на расстоянии r от него. Ответ выразите через λ , R , r и электрическую постоянную ϵ_0 .

При $r \gg R$ величины E и $\frac{dE}{dr}$ поля провода на масштабах размеров шара могут считаться постоянными. В данном приближении дипольный момент шара равен:

$$p = \frac{2\lambda R^3}{r}$$

Сила, действующая на шар, равна:

$$F_r = p \frac{dE_r}{dx}$$

откуда:

Ответ: Сила притяжения равна:

$$F = \frac{\lambda^2 R^3}{\pi \epsilon_0 r^3}$$

A5 ^{0.40} Покажите, что механическая потенциальная энергия W_p шара в поле провода при расстоянии r между проводом и центром шара равна:

$$W_p = -\frac{A}{r^2}$$

Найдите A . Ответ выразите через λ , R и электрическую постоянную ϵ_0 .

Для потенциальной энергии имеем:

$$W_p = -\int_r^\infty F dr$$

Интегрируя, находим:

$$W_p = -\frac{\lambda^2 R^3}{2\pi \epsilon_0 r^2}$$

Отсюда параметр A равен:

Ответ:

$$A = \frac{\lambda^2 R^3}{2\pi \epsilon_0}$$

B1 ^{0.60} Найдите минимальное расстояние $r_{\min}$ между центром шара и проводом в процессе движения, считая, что столкновения не происходит. Ответ выразите через A , b , m и v_0 .

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{A}{r^2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Представим квадрат скорости в следующем виде:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Из закона сохранения момент импульса получим:

$$L = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0 b}{r^2}$$

Комбинируя с законом сохранения энергии, получим:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mv_0^2 b^2}{2r^2} - \frac{A}{r^2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Минимальное расстояние до провода достигается при $\dot{r} = 0$. Отсюда получим:

Ответ:

$$r_{min} = \sqrt{b^2 - \frac{2A}{mv_0^2}}$$

B2 0.20 Найдите v_{crit} . Ответ выразите через A , b и m .

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Отсюда получим:

Ответ:

$$v_{crit} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2A}{m}}$$

C1 0.40 Выразите u' через r , $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$.

Найдите $u'(0)$, соответствующую значению $\varphi = 0$.

Явно продифференцируем u :

$$u' = \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

Представим $\frac{dr}{d\varphi}$ как производную сложной функции:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

откуда:

Ответ:

$$u' = -\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\varphi}}$$

Величина постоянна и равна:

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{m} = v_0 b$$

В начальный момент скорость направлена прямо на провод. Тогда находим:

Ответ:

$$u'(0) = \frac{1}{b}$$

C2 0.30 Выразите механическую энергию E шара через m , u , u' , v_0 , b и A .

Выражение для механической энергии шара следующее:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{A}{r^2}$$

Из закона сохранения момента импульса имеем:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = mv_0b$$

откуда:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mv_0^2b^2}{2r^2} - \frac{A}{r^2}$$

Переходя к переменным u и u' , получим:

Ответ:

$$\frac{mv_0^2b^2}{2}(u'^2 + u^2) - Au^2 = E = \frac{mv_0^2}{2}$$

СЗ 0.70

Получите зависимость $u(\varphi)$. Ответ выразите через m, v_0, b, A и φ .

Дифференцируя по φ выражение для энергии, получим уравнение гармонических колебаний:

$$u'' = -u\left(1 - \frac{2A}{mv_0^2b^2}\right)$$

с циклической частотой:

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2b^2}}$$

Общее решение запишем в виде:

$$u(\varphi) = C \sin(\omega_0\varphi + \varphi_1)$$

С учётом начальных условий:

$$u(0) = 0 \quad u'(0) = \frac{1}{b}$$

Находим:

Ответ:

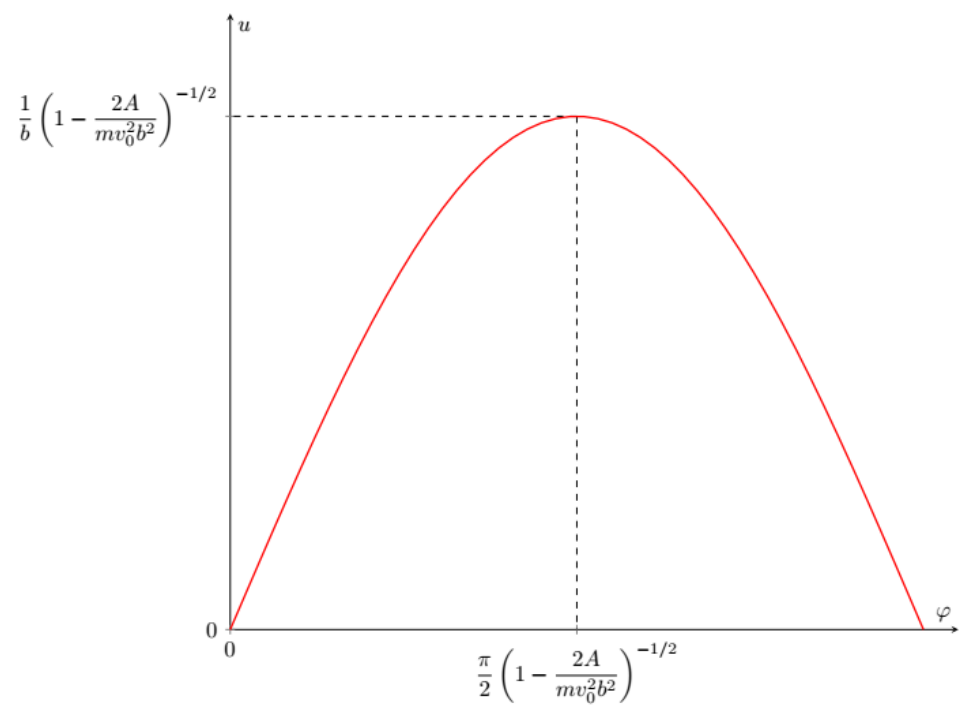
$$u(\varphi) = \frac{1}{b\sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2b^2}}} \sin\left(\varphi\sqrt{1 - \frac{2A}{mv_0^2b^2}}\right)$$

С4 0.60

В листе ответов качественно постройте траекторию центра шара в координатах u, φ . Координаты всех характерных точек могут быть выражены через m, v_0, b и A .

Величина u , начиная от нуля, достигает максимума, а затем, достигая нуля, остаётся постоянной во времени. График приведён на рисунке ниже:

Ответ:



C5 ^{0.50} Используя значение параметра A , найденное в пункте **A4**, найдите начальную скорость шара v_1 , при которой за время взаимодействия между ним и проводом направление скорости шара изменяется на противоположное.
Ответ выразите через m, b, R, λ и электрическую постоянную ϵ_0 .

При изменении направления скорости шарика на противоположное, полное изменение угла φ равно 2π . Отсюда находим величину ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{2}$$

Тогда параметр A равен:

$$A = \frac{3mv_1^2 b^2}{8}$$

Приравнивая с выражением, полученным в пункте **A4**

$$\frac{\lambda^2 R^3}{2\pi\epsilon_0} = \frac{3mv_1^2 b^2}{8}$$

находим:

Ответ:

$$v_1 = \frac{2\lambda R}{b} \sqrt{\frac{R}{3\pi\epsilon_0 m}}$$

D1 ^{0.60} Найдите S и q_2 . Ответы выразите через R, L и q .

Введём в центре сферы цилиндрической систему координат с осью z , направленной вдоль линии, соединяющей центр сферы с зарядом q_1 . Потенциал зарядов q_1 и $-q_2$ в любой точке на поверхности шара равен нулю, поэтому:

$$\frac{q_1}{\sqrt{r^2 + (x - L)^2}} = \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + (x - S)^2}}$$

или:

$$(q_1^2 - q_2^2)(r^2 + x^2) + 2x(q_2^2 L - q_1^2 S) + q_1^2 S^2 - q_2^2 L^2 = 0$$

Поскольку $r^2 + x^2 = R^2$, коэффициент при x равен нулю. Тогда получим систему уравнений:

$$\frac{L}{S} = \frac{q_1^2}{q_2^2} \quad (q_1^2 - q_2^2)R^2 = q_2^2 L^2 - q_1^2 S^2$$

решая которую, находим:

Ответ:

$$S = \frac{R^2}{L} \quad q_2 = \frac{q_1 R}{L}$$

D2^{0.40}

Найдите dq_1 , dq_2 , S и r_- .

Ответы выразите через λ , R , r , α и $d\alpha$.

Для dq_1 имеем:

$$dq_1 = \lambda r d \tan \alpha$$

или:

Ответ:

$$dq_1 = \frac{\lambda r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Рассматриваемый элемент находится на расстоянии $L = \frac{r}{\cos \alpha}$ от центра шара. Отсюда найдём dq_2 и S :

Ответ:

$$dq_2 = \frac{\lambda R}{\cos \alpha} d\alpha \quad S = \frac{R^2 \cos \alpha}{r}$$

Для r_- имеем:

$$r_- = r - S \cos \alpha$$

или

Ответ:

$$r_- = r - \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{r}$$

D3^{0.20}

Найдите величину и направление (притяжение или отталкивание) векторной суммы сил $d\vec{F} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_-$ взаимодействия зарядов dq_2 и $-dq_2$ с проводом. Ответ выразите через λ , R , r , α , $d\alpha$ и электрическую постоянную ϵ_0 .

Пара зарядов-изображений притягивается к проводу, поскольку отрицательный заряд находится на меньшем расстоянии от провода.

Для силы притяжения с учётом электрического поля провода имеем:

$$dF = \frac{\lambda dq_2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right)$$

или:

Ответ: Сила притяжения равна

$$dF = \frac{\lambda^2 R^3}{2\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\cos \alpha d\alpha}{1 - \frac{R^2}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \alpha}$$

D4^{1.00}

Найдите величину и направление полной силы взаимодействия шара с проводом $F_{\text{полн}}$.

Ответ выразите через λ , R , θ и электрическую постоянную ϵ_0 .

Для нахождения полной силы вычислим интеграл от выражения, полученного в пункте **D3** в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Введём величину t , равную:

$$t = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

Тогда получим:

$$F = \frac{\lambda^2 R^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 - R^2}} \int_{-\frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}}^{\frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\lambda^2}{\pi\epsilon_0} \frac{R}{r} \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \arctan \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

Учитывая связь r , R и θ , находим:

Ответ: Сила притяжения равна

$$F = \frac{\lambda^2}{\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta \cdot \theta}{\cos \theta}$$

D5 1.00

Найдите потенциальную энергию W_p взаимодействия шарика с проводом.

Ответ выразите через λ , R , θ и электрическую постоянную ϵ_0 .

Учитывая, что шар притягивается к проводу, выражение для потенциальной энергии следующее:

$$W_p = - \int_r^\infty F(r) dr$$

Найдём величину dr в переменных R и θ :

$$dr = d \left(\frac{R}{\sin \theta} \right) = - \frac{R \cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Тогда имеем:

$$W_p = - \frac{\lambda^2 R}{\pi\epsilon_0} \int_0^\theta \theta d\theta$$

откуда:

Ответ:

$$W_p(\theta) = - \frac{\lambda^2 R \theta^2}{2\pi\epsilon_0}$$

D6 0.30

Какую скорость $v_{\text{ст}}$ будет иметь незаряженный металлический шар радиусом R и массой m при столкновении с проводом, если его из бесконечности отпустить без начальной скорости?

Ответ выразите через λ , R , m и электрическую постоянную ϵ_0 .

В момент контакта шара и провода $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\lambda^2 R}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

откуда:

Ответ:

$$v = \frac{\pi\lambda}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi\epsilon_0 m}}$$

E1 0.40 Для заданного значения v_0 получите зависимость квадрата радиальной компоненты скорости $\dot{r}^2$ от параметра θ .
 Ответ выразите через m, v_0, λ, R, b , электрическую постоянную ϵ_0 и θ .

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\lambda^2 R \theta^2}{2\pi\epsilon_0} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Представим скорость в следующем виде:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

С учётом закона сохранения момента импульса

$$L = mv_0 b = mr^2 \dot{\varphi}$$

находим:

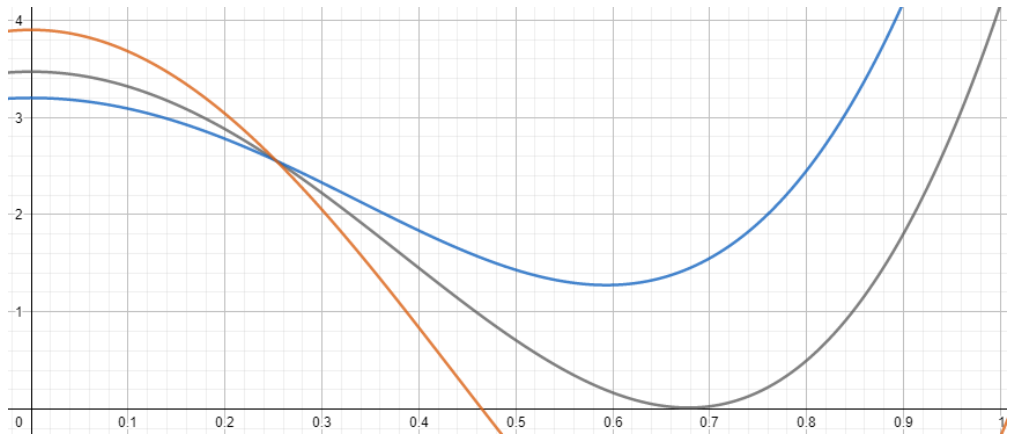
Ответ:

$$\dot{r}^2 = v_0^2 - v_0^2 \frac{b^2}{R^2} \sin^2 \theta + \frac{\lambda^2 R}{\pi\epsilon_0 m} \theta^2$$

E2 0.60 Постройте качественные графики зависимости $\dot{r}^2(\theta)$ при разных значениях v_0 .

В зависимости от величины v_0 функции делятся на три типа:

- 1) пересекающие ось ординат при $\theta < \frac{\pi}{2}$;
- 2) не пересекающие ось ординат;
- 3) касающиеся оси ординат при $\theta < \frac{\pi}{2}$.



E3 0.60 Считая все величины, кроме v_0 , постоянными, получите систему уравнений, позволяющую определить величину v_{crit} .
 В систему уравнений могут войти m, R, b, λ , электрическая постоянная ϵ_0 , θ_{max} и v_{crit} .

При достаточно больших скоростях (функция 1-го типа) график пересекает ось ординат. В момент пересечения величина $\dot{r}$ изменяется на противоположную, поскольку $\dot{r}^2 > 0$.

При достаточно низких скоростях (функция 2-го типа) значение $\dot{r}^2$ в экстремуме положительно, поэтому шар падает на провод.

Функция 3-го типа является граничным случаем рассмотренных выше - в экстремуме значение функции $\dot{r}^2$ обращается в ноль.

При сколь угодно больших скоростях шар не коснётся провода.

Отсюда ясно, что в равенства нулю величины $\dot{r}^2$ нужно также приравнять нулю производную $\frac{d\dot{r}^2}{d\varphi}$, что в виде системы записывается следующим образом:

Ответ:

$$\left(\frac{b^2 \sin^2 \theta_{max}}{R^2} - 1 \right) = \frac{\lambda^2 R \theta_{max}^2}{m v_0^2 \pi \epsilon_0} \quad \frac{b^2 \sin 2\theta_{max}}{R^2} = \frac{2\lambda^2 R \theta_{max}}{m v_0^2 \pi \epsilon_0}$$

E4 1.20 Найдите v_{crit1} , v_{crit2} и v_{crit3} , соответствующие следующим значениям b :

$$b_1 = 20R \quad b_2 = 3R \quad b_3 = 1,1R$$

Ответы выразите через m, R, λ и электрическую постоянную ϵ_0 .

Из уравнения для равной нулю производной находим:

$$v_0 = \lambda \sqrt{\frac{R}{\pi \epsilon_0 m}} \cdot \frac{R}{b} \sqrt{\frac{2\theta_{max}}{\sin 2\theta_{max}}}$$

Для нахождения v_0 необходимо определить θ_{max} .
Разделив уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{k^2 \sin^2 \theta_{max} - 1}{k^2 \sin 2\theta_{max}} = \frac{\theta_{max}}{2} \quad k = \frac{b}{R}$$

Решая уравнение на калькуляторе, находим:

$$\theta_{max1} = 0,296 \text{ рад} \quad \theta_{max2} = 0,793 \text{ рад} \quad \theta_{max3} = 1,459 \text{ рад}$$

откуда:

Ответ:

$$v_{crit1} \approx 5,15 \cdot 10^{-2} \lambda \sqrt{\frac{R}{\pi \epsilon_0 m}} \quad v_{crit2} \approx 3,15 \cdot 10^{-1} \lambda \sqrt{\frac{R}{\pi \epsilon_0 m}} \quad v_{crit3} \approx 3,30 \lambda \sqrt{\frac{R}{\pi \epsilon_0 m}}$$