

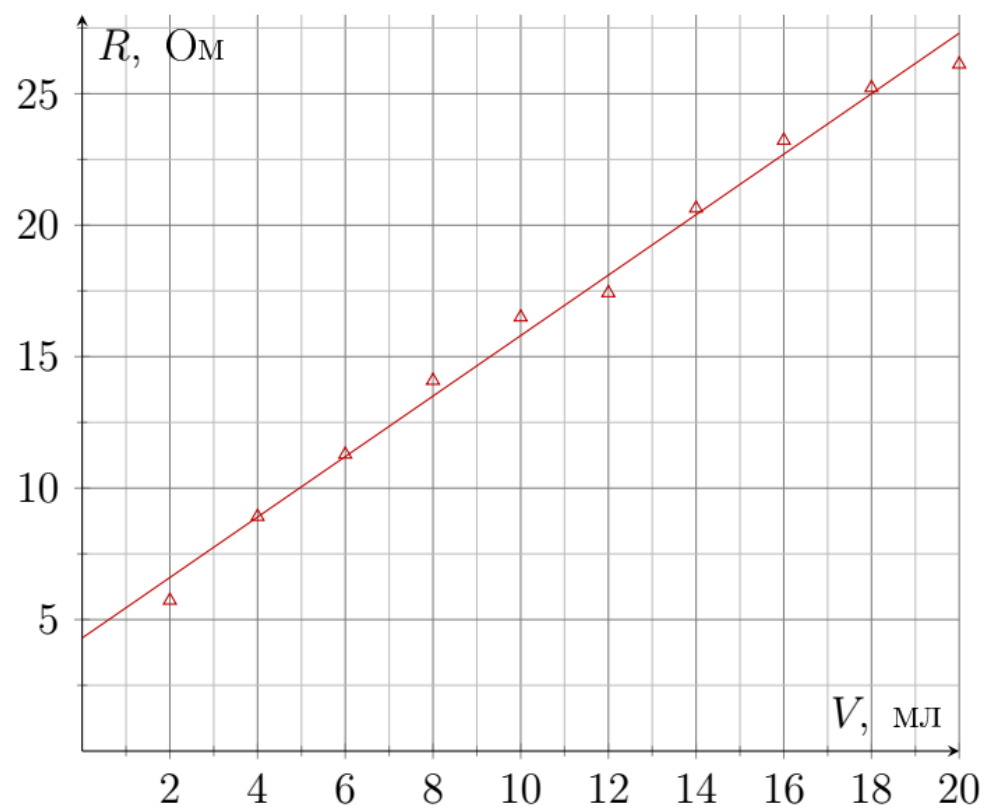
A1^{0.02} Измерьте внутренний диаметр шприца D_0 и расстояние L_0 между отметками 0 мл и 20 мл.

Ответ: $L_0 = 65$ мм

Ответ: Определить D_0 можно поделив 20 мл на L_0
 $D_0 = 20$ мм

A2^{0.40} Сделайте измерения сопротивления R соответствующие положениям шприца $V = 2, 4, \dots, 20$ мл.

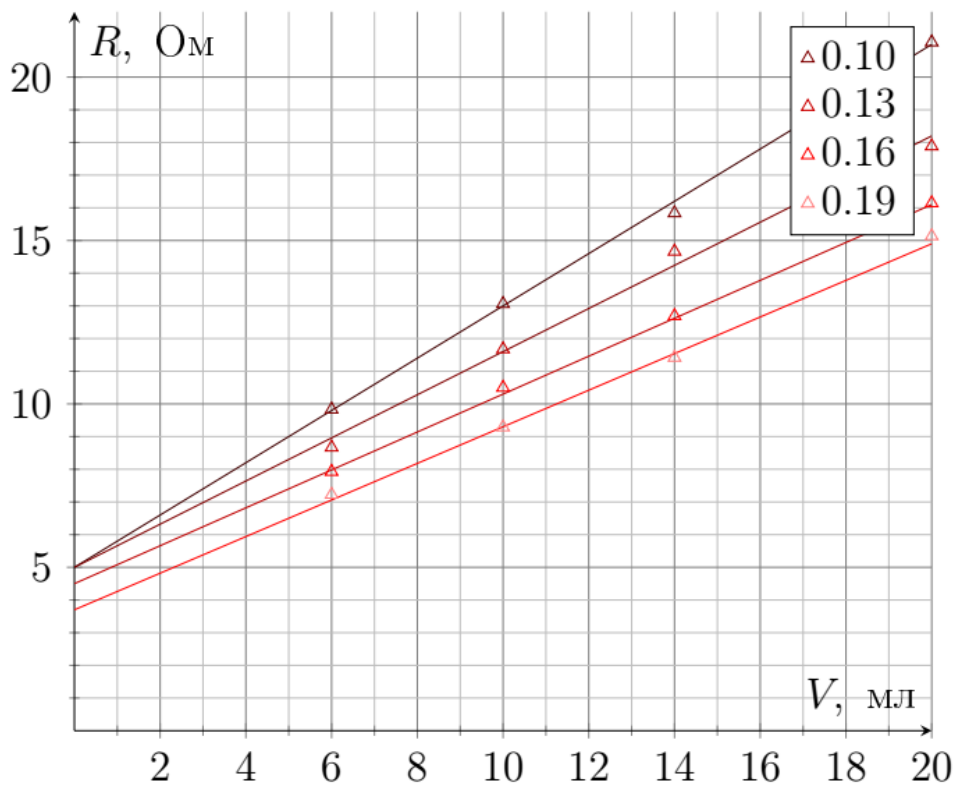
A3^{0.40} Постройте график R от V . Проведите сглаживающую прямую $R = R_1 + \alpha_1 V$. Рассчитайте значения параметров R_1 и α_1 .



Ответ: $R_1 = 4.3$ Ом

Ответ: $\alpha_1 = 1.15 \frac{\text{Ом}}{\text{см}^3}$

B1^{0.80} Для каждого из приготовленных растворов проведите серию из 4-ех измерений R от V .



B2^{0.12} С помощью МНК для каждого из растворов посчитайте параметры R_1 и α_1 по аналогии с пунктом **A3**. Результаты представьте в виде таблицы.

c	0.07	0,1	0,13	0,16	0,19
$\alpha_1, \frac{\text{Ом}}{\text{см}^3}$	1.15	0.80	0.66	0.58	0.56
$R_1, \text{Ом}$	4.3	5.0	4.9	4.5	3.7

B3^{0.06} В среде создается внешнее постоянное поле E . Чему равна установившаяся скорость частицы v_y ? Ответ запишите через E, k, q .

Запишем II закон Ньютона:

$$Eq = kv_y$$

Ответ:

$$v_y = \frac{Eq}{k}$$

B4^{0.15} Чему равен установившийся ток I , если к электродам подведена разность потенциалов U ? Любыми поверхностными эффектами пренебрегите (например, контактной разностью потенциалов и контактным сопротивлением). Ответ запишите через $n, S, L, e, k_{\text{Na}^+}, k_{\text{Cl}^-}$ и U .

По определению $I = \frac{dq}{dt}$, при этом поток площадью S частиц зарядом q ,двигающийся с постоянной скоростью v образует такой ток:

$$I = \frac{dq}{dt} = nvSq \tag{1}$$

Тогда ток в нашем случае складывается из двух потоков ионов. Концентрации ионов равны из условия электронейтральности:

$$I = nSe\frac{Ee}{k_{\text{Na}^+}} + nSe\frac{Ee}{k_{\text{Cl}^-}}.$$

Поле E выражается через разность потенциалов, как U/L .

Ответ:

$$I = \frac{nSe^2U}{L}\left(\frac{1}{k_{\text{Na}^+}} + \frac{1}{k_{\text{Cl}^-}}\right)$$

B5^{0.65} Пусть к основаниям подведена разность потенциалов $U(t) = U \cos \omega t$, как будет зависеть ток $I(t)$ от времени? Любыми поверхностными эффектами снова пренебрегите. Ответ запишите через $n, S, L, e, \omega, m_{\text{Na}^+}, m_{\text{Cl}^-}, k_{\text{Na}^+}, k_{\text{Cl}^-}, U$ и t .

Будем решать задачу методом комплексных амплитуд:

$$U \cos \omega t = \Re U e^{i\omega t}.$$

Тогда комплексное электрическое поле E внутри среды такое:

$$\tilde{E} = \frac{U}{L} e^{i\omega t}.$$

Запишем II закон Ньютона для частицы в переменном поле $E e^{i\omega t}$:

$$m\dot{v} + kv = Eq e^{i\omega t}.$$

Собственные решения являются экспоненциально спадающими, поэтому нас интересует только частное решение вида $v = \tilde{B} e^{i\omega t}$:

$$i\omega m \tilde{B} + k \tilde{B} = Eq \Rightarrow \tilde{B} = \frac{Eq}{i\omega m + k} = \frac{Eq}{k} \frac{1}{1 + i\omega \frac{m}{k}} = \frac{Eq}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 m^2}{k^2}}} e^{-i \arctan \frac{\omega m}{k}}.$$

Комплексный ток $\tilde{I}$ пересчитаем с учетом уравнения (1):

$$\tilde{I} = \frac{nSe^2 U}{Lk_{\text{Na}^+}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 m_{\text{Na}^+}^2}{k_{\text{Na}^+}^2}}} e^{-i \arctan \frac{\omega m_{\text{Na}^+}}{k_{\text{Na}^+}} + i\omega t} + \frac{nSe^2 U}{Lk_{\text{Cl}^-}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 m_{\text{Cl}^-}^2}{k_{\text{Cl}^-}^2}}} e^{-i \arctan \frac{\omega m_{\text{Cl}^-}}{k_{\text{Cl}^-}} + i\omega t}$$

Перейдем от комплексного тока путем взятия действительной части.

Ответ:

$$I = \frac{nSe^2 U}{Lk_{\text{Na}^+}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 m_{\text{Na}^+}^2}{k_{\text{Na}^+}^2}}} \cos\left(-\arctan \frac{\omega m_{\text{Na}^+}}{k_{\text{Na}^+}} + \omega t\right) + \frac{nSe^2 U}{Lk_{\text{Cl}^-}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 m_{\text{Cl}^-}^2}{k_{\text{Cl}^-}^2}}} \cos\left(-\arctan \frac{\omega m_{\text{Cl}^-}}{k_{\text{Cl}^-}} + \omega t\right)$$

B6^{0.25} Теперь учтем поверхностные эффекты в виде резистора R_{Π} , который последовательно подключен к раствору. Запишите формулу для импеданса $\tilde{Z}(\omega)$ системы, состоящей из раствора NaCl и сосуда. Ответ запишите через $n, S, L, e, m_{\text{Na}^+}, m_{\text{Cl}^-}, \omega, k_{\text{Na}^+}, k_{\text{Cl}^-}$ и R_{Π} .

Импеданс одного вида ионов очевидно выражается из уже полученных уравнений

$$\tilde{Z} = \frac{Lk}{nSq^2} \left(1 + i\omega \frac{m}{k}\right),$$

при этом токи складываются при одинаковых напряжениях, значит импедансы Na^+ и Cl^- "подключены" параллельно, и еще последовательно с ними стоит резистор R_{Π} .

Ответ:

$$\tilde{Z}(\omega) = R_{\Pi} + \frac{\frac{k_{\text{Na}^+} L}{nSe^2} \left(1 + \frac{i\omega m_{\text{Na}^+}}{k_{\text{Na}^+}}\right) \cdot \frac{k_{\text{Cl}^-} L}{nSe^2} \left(1 + \frac{i\omega m_{\text{Cl}^-}}{k_{\text{Cl}^-}}\right)}{\frac{k_{\text{Na}^+} L}{nSe^2} \left(1 + \frac{i\omega m_{\text{Na}^+}}{k_{\text{Na}^+}}\right) + \frac{k_{\text{Cl}^-} L}{nSe^2} \left(1 + \frac{i\omega m_{\text{Cl}^-}}{k_{\text{Cl}^-}}\right)}$$

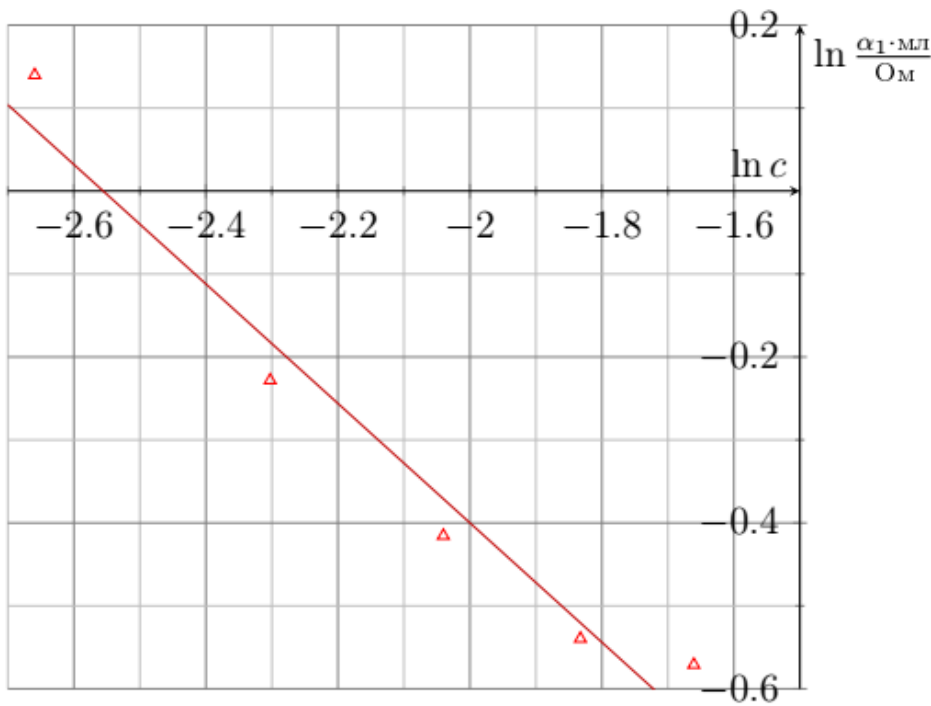
B7^{0.10} Чему равен теоретический импеданс системы $\tilde{Z}$, если разность фаз между напряжением пренебрежимо мала? Ответ выразите через $n, S, L, e, k_{\text{Na}^+}, k_{\text{Cl}^-}$ и R_{Π} .

Если разность фаз пренебрежимо мала, то комплексными частями можно пренебречь и поведение системы соответствует поведению при постоянном напряжении.

Ответ:

$$\tilde{Z} = R_{\pi} + \frac{L}{nSe^2} \frac{k_{\text{Na}^+} \cdot k_{\text{Cl}^-}}{k_{\text{Na}^+} + k_{\text{Cl}^-}}$$

В8^{0.40} Используя линеаризованный график α_1 от c получите значение α .



Ответ:

$$\alpha_1 = \frac{dZ}{dL} \cdot \frac{1}{S} \propto \frac{k}{n} \propto n^{\alpha-1}$$

Из графика $\alpha_1 = 0.3$.

В9^{0.40} Получите теоретическую зависимость $|\tilde{Z}|^2(\omega)$ в приближении $\omega m_{\text{Na}^+} \gg k_{\text{Na}^+}$, $\omega m_{\text{Cl}^-} \gg k_{\text{Cl}^-}$. Ответ запишите через $n, S, L, e, m_{\text{Na}^+}, m_{\text{Cl}^-}, \omega, k_{\text{Na}^+}, k_{\text{Cl}^-}$ и R_{π} .

Упростим формулу для импеданса из В6:

$$\tilde{Z} = R_{\pi} + \frac{L}{nSe^2} \frac{(k_{\text{Na}^+} + i\omega m_{\text{Na}^+})(k_{\text{Cl}^-} + i\omega m_{\text{Cl}^-})}{(k_{\text{Na}^+} + k_{\text{Cl}^-}) + i\omega(m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-})}$$

Первое приближение происходит на этапе перемножения:

$$\tilde{Z} = R_{\pi} + \frac{L}{nSe^2} \frac{-\omega^2 m_{\text{Na}^+} m_{\text{Cl}^-} + i\omega(m_{\text{Na}^+} k_{\text{Cl}^-} + m_{\text{Cl}^-} k_{\text{Na}^+})}{(k_{\text{Na}^+} + k_{\text{Cl}^-}) + i\omega(m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-})}$$

Домножим числитель и знаменатель на комплексно сопряженное к знаменателю и снова сделаем пренебрежение:

$$\tilde{Z} = R_{\pi} + \frac{L}{nSe^2} \frac{-\omega^2 m_{\text{Na}^+} m_{\text{Cl}^-} (k_{\text{Na}^+} + k_{\text{Cl}^-}) + i\omega^3 m_{\text{Na}^+} m_{\text{Cl}^-} (m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-}) + \omega^2 (m_{\text{Na}^+} k_{\text{Cl}^-} + m_{\text{Cl}^-} k_{\text{Na}^+}) (m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-})}{\omega^2 (m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-})^2}$$

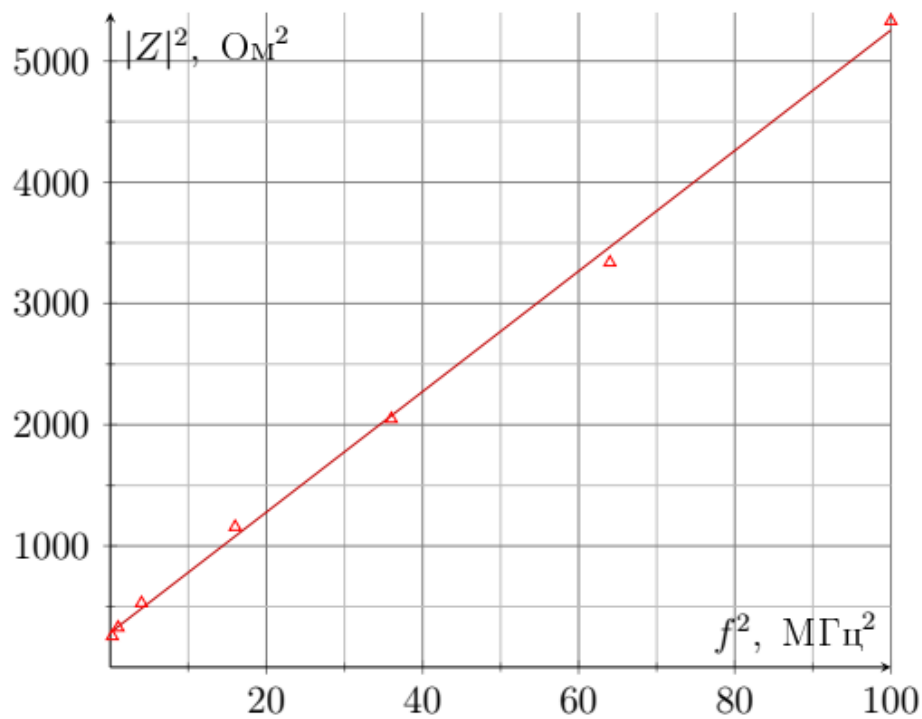
Ответ:

$$|\tilde{Z}|^2 = \left(R_{\pi} + \frac{L}{nSe^2} \frac{m_{\text{Na}^+}^2 k_{\text{Cl}^-} + m_{\text{Cl}^-}^2 k_{\text{Na}^+}}{(m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-})^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{L}{nSe^2} \frac{m_{\text{Na}^+} m_{\text{Cl}^-}}{m_{\text{Na}^+} + m_{\text{Cl}^-}} \right)^2$$

В10^{0.35} Для раствора с концентрацией соли $c \approx 0.20$ проведите измерения модуля импеданса $|Z|$ от частоты f . Серия должна состоять из не менее 7-ми разных f в диапазоне $500 \text{ кГц} \leq f \leq 10 \text{ МГц}$.

В11^{0.50} Постройте линеаризованный график $|Z|$ от f . Из графика определите экспериментальное значение $\mu_{\text{эфф}} = \frac{\mu_{\text{Na}^+} \mu_{\text{Cl}^-}}{\mu_{\text{Na}^+} + \mu_{\text{Cl}^-}}$.

Согласно последнему теоретическому пункту график $|\tilde{Z}|^2$ от f^2 линейный.



Ответ: Из графика коэффициент наклона равен $61 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ом}^2}{\Gamma_{\text{ц}}^2}$, а из теории он равен $\left(\frac{2\pi L m_{\text{эфф}}}{n S e^2}\right)^2$.

$$\mu_{\text{эфф}} = 170 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

B12^{0.15} Определите N исходя из ваших экспериментальных данных.

Запишем формулу исходя из модели, описанной в условии:

$$\mu_{\text{эфф}} = \frac{(\mu_{\text{Na}} + N\mu_{\text{H}_2\text{O}}) \cdot (\mu_{\text{Cl}} + N\mu_{\text{H}_2\text{O}})}{\mu_{\text{Na}} + N\mu_{\text{H}_2\text{O}} + \mu_{\text{Cl}} + N\mu_{\text{H}_2\text{O}}}$$

Преобразуем к квадратному уравнению относительно N :

$$N^2 + N \left(\frac{\mu_{\text{Na}} + \mu_{\text{Cl}} - 2\mu_{\text{эфф}}}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} \right) + \frac{\mu_{\text{Na}}\mu_{\text{Cl}} - \mu_{\text{эфф}}(\mu_{\text{Na}} + \mu_{\text{Cl}})}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}^2} = 0$$

Из-за того, что $\mu_{\text{эфф}}$ очень больше, фактически, $N = \frac{2\mu_{\text{эфф}}}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} = 1.8 \cdot 10^7$.

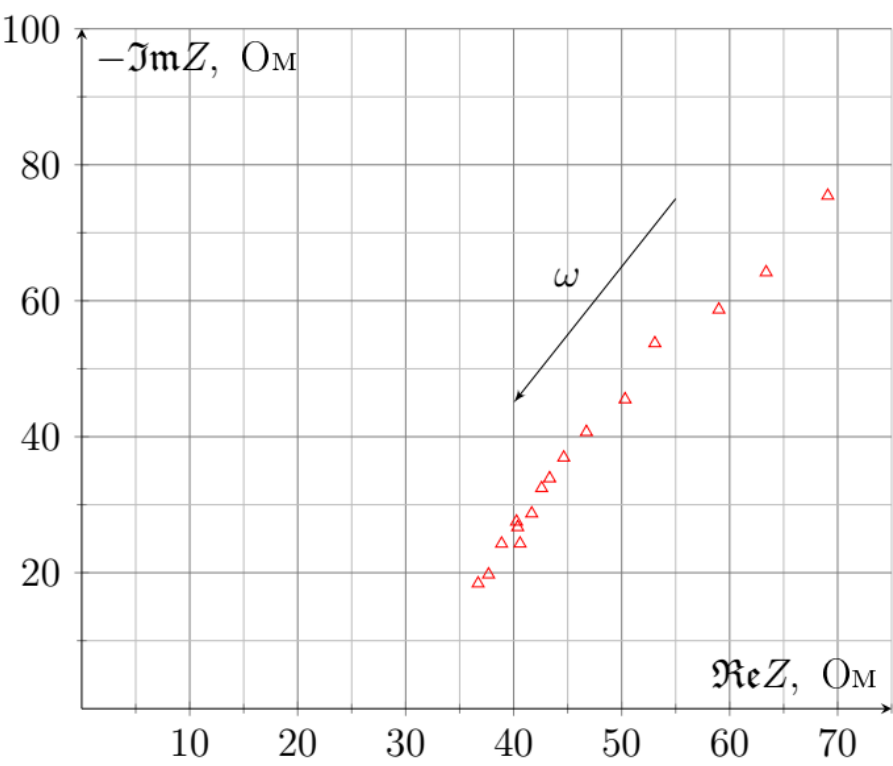
Можно заключить, что измеренная индуктивность никак не связана с теоретически рассмотренным эффектом. Тем временем индуктивность витка с током радиусом 10 см можно оценить, как 10^{-6} Гн, что имеет один порядок с корнем из коэффициента наклона.

Ответ:

$$N = 1.8 \cdot 10^7$$

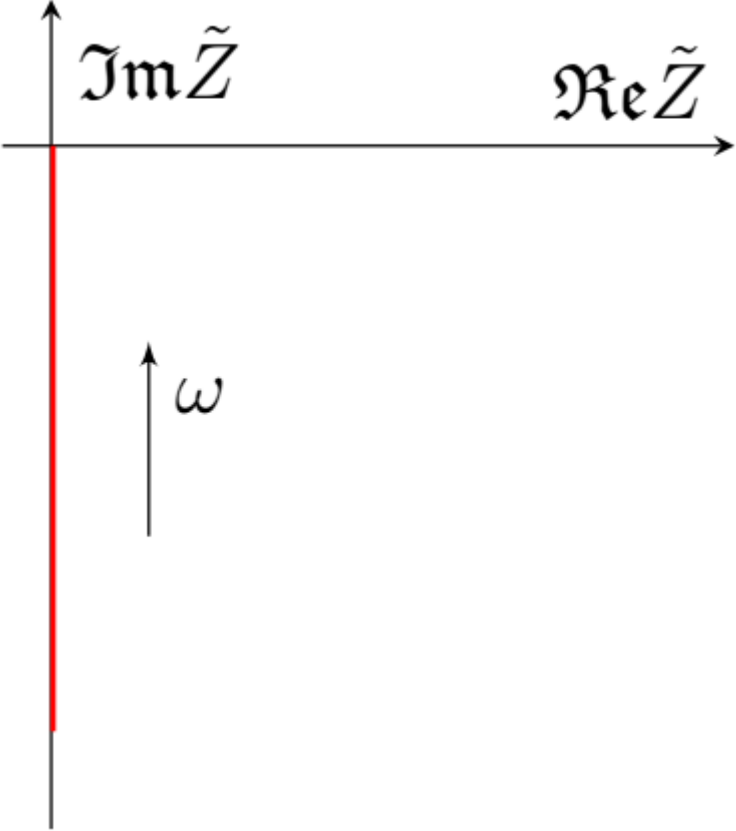
C1^{1.50} В диапазоне частот $5 \text{ Гц} \leq f \leq 1 \text{ кГц}$ проведите измерения модуля импеданса шприца $|\tilde{Z}|$ и времени Δt , на которое пик тока опережает пик напряжения. Сделайте не менее 15 измерений.

C2^{0.60} На основе Ваших данных постройте диаграмму Найквиста $\Im m \tilde{Z}_{\text{п}}$ от $\Re e \tilde{Z}_{\text{п}}$ для поверхностных эффектов. Укажите на диаграмме в виде стрелки направление перехода от точки к точке, соответствующее увеличению ω .



СЗ 0.10 Качественно изобразите диаграмму Найквиста для плоского конденсатора.

Ответ:



С4 0.20 Запишите выражения для C_l и R_l через r , σ , ρ и ξ .

Ответ: Ёмкость C_l — это ёмкость единицы длины поверхности цилиндра, поэтому

$$C_l = 2\pi r \sigma.$$

Сопротивление R_l — это сопротивление единицы длины воды вокруг одного цилиндра, поэтому $R_l = \rho/S_1$, где S_1 — площадь воды, приходящаяся на один цилиндр, поэтому

$$R_l = \frac{\rho}{\frac{1}{\xi} - \pi r^2}.$$

С5 0.10 Запишите комплексный ток $\tilde{I}(x)$ через производную комплексного потенциала $\frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx}$ и R_l .

Запишем падение напряжения на единице длины проводника:

$$-R_l dx \tilde{I} = \tilde{\varphi}(x + dx) - \tilde{\varphi}(x)$$

Ответ:

$$\tilde{I}(x) = -\frac{1}{R_l} \frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx}$$

С6^{0.10}

Свяжите производную комплексного тока $\frac{d\tilde{I}(x)}{dx}$ и комплексный потенциал $\tilde{\varphi}(x)$ через C_l .

Ток через единицу длины конденсатора

$$\frac{\tilde{I}(x + dx) - \tilde{I}(x)}{i\omega C_l dx} = -\tilde{\varphi}(x)$$

Ответ:

$$\frac{d\tilde{I}(x)}{dx} = -i\omega C_l \tilde{\varphi}(x)$$

С7^{0.20}

Покажите, что $\tilde{I}(0) = 0$.

Если ток не нулевой, то он течет через бесконечно малую ёмкость, значит $\varphi(0) \rightarrow \infty$.

С8^{1.25}

Решите полученную в пунктах **С5** и **С6** систему дифференциальных уравнений и получите импеданс $\tilde{Z}_{\text{ц}}(\omega)$ одного цилиндра и электролита, окружающего его. Ёмкостью основания цилиндра и ёмкостью плоской поверхности, на которой стоят цилиндры пренебрегайте. Ответ выразите через C_l , R_l , l и ω .

Получим дифференциальное уравнение на $\tilde{\varphi}(x)$:

$$\tilde{\varphi}'' - i\omega C_l R_l \tilde{\varphi} = 0$$

Это однородное линейное диф.уравнение второго порядка. Найдем собственные числа:

$$\lambda^2 = i\omega C_l R_l.$$

$$\lambda_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \sqrt{\omega C_l R_l} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega R_l C_l}{2}}$$

$$\lambda_2 = e^{\frac{i\pi}{2} + 2\pi i} \sqrt{\omega C_l R_l} = -(1 + i) \sqrt{\frac{\omega R_l C_l}{2}}$$

Обозначим $\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}$ за ζ . Тогда

$$\tilde{\varphi}(x) = A e^{i\zeta x} e^{\zeta x} + B e^{-i\zeta x} e^{-\zeta x}.$$

Граничные условия: $\tilde{\varphi}(l) = U e^{i\omega t}$, $\tilde{\varphi}'(0) = 0$.

$$\tilde{\varphi}'(0) = A(1 + i)\zeta - B(1 + i)\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad B = A,$$

$$\tilde{\varphi}(l) = A \left(e^{i\zeta l} e^{\zeta l} + e^{-i\zeta l} e^{-\zeta l} \right) = 2A \cosh(\zeta l + i\zeta l) = U e^{i\omega t}$$

В итоге решение на потенциал выглядит так:

$$\tilde{\varphi}(x) = U e^{i\omega t} \frac{\cosh(\zeta x + i\zeta x)}{\cosh(\zeta l + i\zeta l)}$$

Найдем ток $\tilde{I}(l)$:

$$\tilde{I}(l) = -\frac{1}{R_l}\tilde{\varphi}'(l) = -Ue^{i\omega t}\frac{\zeta(1+i)}{R_l}\tanh(\zeta l + i\zeta l),$$

затем импеданс (минус возникает благодаря согласованию положительного направления ток и убывания импеданса):

$$\tilde{Z}_{\text{ц}} = \frac{\tilde{\varphi}(l)}{-\tilde{I}(l)} = \frac{R_l}{\zeta(1+i)\tanh(\zeta l + i\zeta l)} = \sqrt{\frac{R_l}{2\omega C_l}}\frac{1-i}{\tanh\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l\right)}$$

Разложим $\tanh$:

$$\tilde{Z}_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}\frac{1-i\tanh\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l\cdot\tan\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l}{\tanh\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l-i\tan\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l}e^{-i\pi/4}.$$

Ответ:

$$\tilde{Z}_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}\frac{1+i\tanh\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l\cdot\tan\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l}{\tanh\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l+i\tan\sqrt{\frac{\omega C_l R_l}{2}}l}e^{-i\pi/4}.$$

C9^{0.20} Получите импеданс $\tilde{Z}_{\text{ц}}(\omega)$ в приближении $\sqrt{\omega C_l R_l l^2} \gg 1$. Ответ выразите через C_l , R_l , l и ω . Следующие теоретические пункты также решаются в этом приближении.

Домножим числитель и знаменатель на $\cosh \zeta l \cdot \cos \zeta l$:

$$\tilde{Z}_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}\frac{\cosh \zeta l \cos \zeta l + i \sin \zeta l \sinh \zeta l}{\cos \zeta l \sinh \zeta l + i \cosh \zeta l \sin \zeta l}e^{-i\pi/4},$$

при $\zeta l \gg 1$ гиперболические функции $\sinh \zeta l$ и $\cosh \zeta l$ равны экспоненте $\frac{e^{\zeta l}}{2}$, поэтому

$$\tilde{Z}_{\text{ц}} \simeq \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}\frac{\cos \zeta l e^{\zeta l} + i \sin \zeta l e^{\zeta l}}{\cos \zeta l e^{\zeta l} + i \sin \zeta l e^{\zeta l}}e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}e^{-i\pi/4}$$

Ответ:

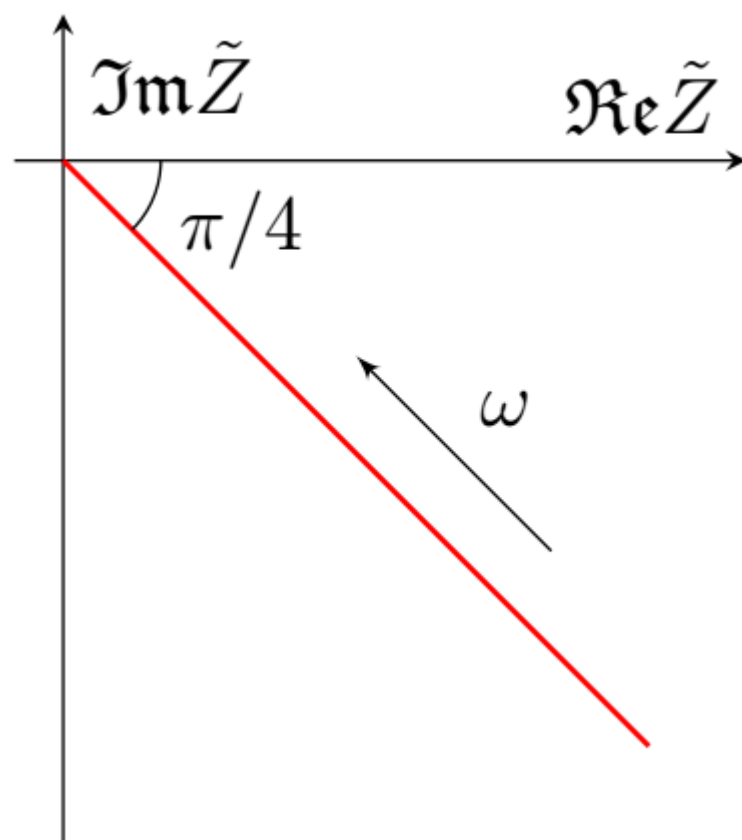
$$\tilde{Z}_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{R_l}{\omega C_l}}e^{-i\pi/4}$$

C10^{0.20} Чему равен импеданс $\tilde{Z}_{\text{н}}(\omega)$ одной поверхности цилиндра, соприкасающейся с электролитом. Площадь поверхности S . Ответ выразите через r , σ , ρ , ξ , S и ω .

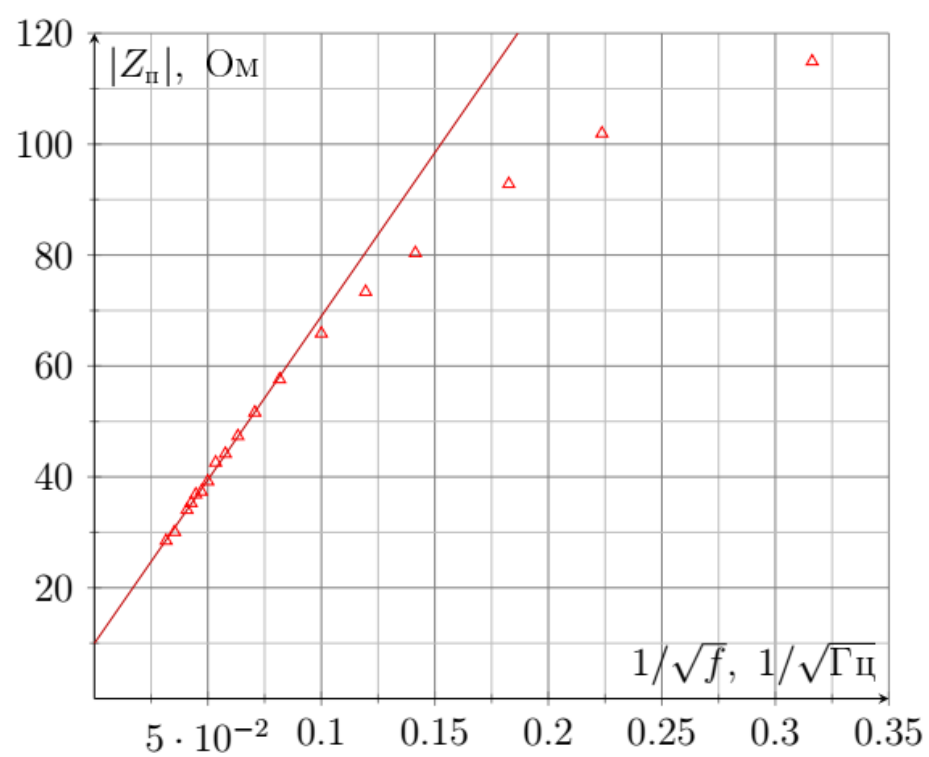
Нарисуйте качественно диаграмму Найквиста $\tilde{Z}_{\text{н}}(\omega)$. Теоретическая и экспериментальная диаграммы Найквиста должны совпадать по форме, но часть их характеристик могут незначительно отличаться.

Совместим результаты предыдущих пунктов.

$$\tilde{Z}_{\text{н}} = \frac{1}{\xi S}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi r\sigma\omega\left(\frac{1}{\xi}-\pi r^2\right)}}e^{-i\pi/4}$$



C11^{0.70} Постройте линеаризованный график $|\tilde{Z}_{\Pi}|$ от ω .



C12^{0.10} Определите σ .

Ответ: $\sigma_0 = 6.9 \frac{\text{мкФ}}{\text{см}^2}$