

Road to IPhO

Динамика квазичастиц

Твердые тела (например металлы) представляют собой кристаллическую решетку из положительно заряженных ионов, между которыми движутся электроны. Электроны взаимодействуют с кристаллической решеткой и друг другом, поэтому для точного описания свойств твердого тела нужно решать крайне сложную многочастичную задачу. Однако в некоторых случаях оказывается, что все влияние взаимодействия сводится к тому, что вместо электронов в кристалле распространяются слабо взаимодействующие друг с другом частицы, уравнения движения которых существенно отличаются от уравнений для свободных электронов. Такие практически не взаимодействующие друг с другом частицы называют квазичастицами. Для простоты их обычно тоже называют электронами. Свойства квазичастиц определяются параметрами кристаллической решетки и величиной взаимодействия электронов и ионов.

Для электрона (квазичастицы) зависимость энергии от импульса $\varepsilon(\vec{p})$ может иметь очень сложный вид. Тогда связь скорости и импульса задается соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x}, \quad v_y = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_y}, \quad v_z = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_z}.$$

Скорость понимается в обычном смысле — как производная соответствующей координаты по времени.

Выражение для силы, действующей на электрон во внешних электрических и магнитных полях такое же, как и в случае движения в вакууме и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Заряд электрона равен $-q$, $q > 0$.

В этой задаче вам предстоит рассмотреть некоторые случаи движения квазичастиц (электронов) с заданной зависимостью $\varepsilon(\vec{p})$. В части C вы сможете изучить еще один тип квазичастиц — фононы, представляющие собой колебания кристаллической решетки.

Часть А. Блоховские осцилляции (2 балла)

A1 Пусть зависимость энергии электрона от импульса имеет вид

0.7

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0(3 - \cos(ap_x) - \cos(ap_y) - \cos(ap_z)).$$

Найдите его ускорение в момент времени, когда импульс равен $p_x = \frac{\pi}{2a}$, $p_y = \frac{\pi}{3a}$, $p_z = 0$, а компоненты действующей на электрон силы F_x , F_y , F_z .

A2 Пусть электрон с $\varepsilon(\vec{p})$ из **A1** движется в постоянном электрическом поле величины E , направленном вдоль оси x . Начальные координаты и проекции импульса равны нулю. Заряд электрона $-q$. Найдите его закон движения $x(t)$.

0.8

A3 Концентрация свободных электронов в некотором веществе равна n , зависимость $\varepsilon(p)$ как в **A1**. В начальный момент времени включается постоянное электрическое поле E , направленное вдоль оси x . Найдите зависимость плотности тока j от времени.

0.5

Часть В. Движение в магнитном поле (4 балла)

В этой части будем рассматривать движение электрона в постоянном магнитном поле $\vec{B}$.

B1 Пусть зависимость энергии от импульса $\varepsilon(\vec{p})$ произвольна. Докажите, что энергия ε и проекция импульса на направление магнитного поля сохраняются.

0.5

Дальше будем считать, что магнитное поле величины B направлено вдоль оси z , а движение электрона происходит в плоскости xy .

Road to IPhO

B2 Пусть зависимость энергии от импульса имеет вид

1.1

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y}.$$

Энергия электрона равна ε . Найдите частоту движения ω . Изобразите траекторию движения частицы на плоскости xy , укажите характерные размеры и направление движения. Начало координат поместите в центре симметрии траектории.

Пусть теперь в дополнение к магнитному полю на электрон из **B2** действует электрическое поле E , направленное вдоль оси x . Начальные значения координаты и импульса электрона равны нулю.

B3 Найдите годограф вектора импульса электрона (траекторию, по которой движется конец вектора импульса, если его откладывать от одной точки). Изобразите его на плоскости p_x, p_y . Укажите характерные размеры. **0.6**

B4 Найдите закон движения $x(t), y(t)$. **0.4**

Электрическое поле снова равно нулю. Зависимость энергии электрона от импульса имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \cos(ap_x)) + \frac{p_y^2}{2m_y}.$$

B5 Если энергия больше минимального значения, траектории на плоскости становятся незамкнутыми, и частица может неограниченно далеко некотором направлении. Найдите эту минимальную энергию ε_{min} . При энергии $\varepsilon > \varepsilon_{min}$ изобразите траекторию, укажите характерные геометрические размеры. **1.4**

Наличие незамкнутых электронных орбит существенно меняет свойства материала. В частности, такие орбиты определяют поведение сопротивления в сильных магнитных полях.

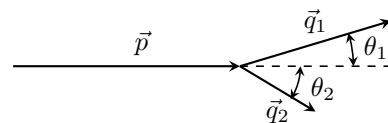
Часть С. Распад фонона (4 балла)

Другой тип квазичастиц, встречающихся в физике твердого тела — фононы, которые представляют собой колебания кристаллической решетки. По своим свойствам они похожи на фотоны, однако из-за особенностей решетки зависимость энергии от импульса нелинейна. Пусть зависимость энергии от импульса для фонона имеет вид

$$\varepsilon(p) = up + \alpha p^3.$$

Здесь u — скорость звука в кристалле, постоянная α задает величину дисперсии. В этой части будем считать, что второе слагаемое много меньше первого, $\alpha p^3 \ll up$.

В отличие от фотона, фонон при определенных условиях может распасться на два фонона. Исследуем этот процесс. Пусть импульс исходного фонона равен p , и он распадается на два фонона с импульсами q_1 и q_2 , которые движутся под углами θ_1, θ_2 с направлением движения исходного фонона.



C1 Сначала пренебрежем дисперсией и рассмотрим случай $\alpha = 0$. При каких углах θ_1, θ_2 возможен распад? **0.5**

Далее будем рассматривать случай $\alpha \neq 0$. Оказывается, что в случае малого импульса исходного фонона p , углы θ_1, θ_2 также малы.

C2 Выразите модуль импульса второго фонона q_2 через p, q_1, θ_1 . Получите выражение выражение в пределе малых θ_1 с точностью до второго порядка по θ_1 . **0.5**

C3 Зависимость импульса излучаемого фонона от угла при малых углах имеет вид **1.2**

$$q_1(\theta_1) = A + B\theta_1.$$

Определите постоянные A, B . Выразите их через p, u, α .

Road to IPhO

- | | | |
|-----------|--|------------|
| C4 | При каком знаке постоянной α распад возможен? | 0.3 |
| C5 | Найдите максимальный угол θ_{max} , под которым может излучаться фонон. При каком условии на p импульс фонона можно считать малым? | 0.5 |
| C6 | Выразите угол θ_2 , под которым излучается второй фонон, через θ_1, p, u, α . Считайте углы малыми, учтите вклады первого порядка по θ_1, θ_2 . | 1.0 |