

Road to IPhO

Измерение радиуса звезды

Измерения радиусов звёзд — сложная задача ввиду большого расстояния до них. Неоднородности в атмосфере размывают изображение, затрудняя определение их реального размера. Один из возможных методов измерения радиуса звёзд — использование интерферометра. Этот метод был предложен Майкельсоном и Пизом в 1921 году для измерения диаметра Бетельгейзе. На рисунке ниже представлена схема интерферометра, использованного для измерения радиуса звезды.

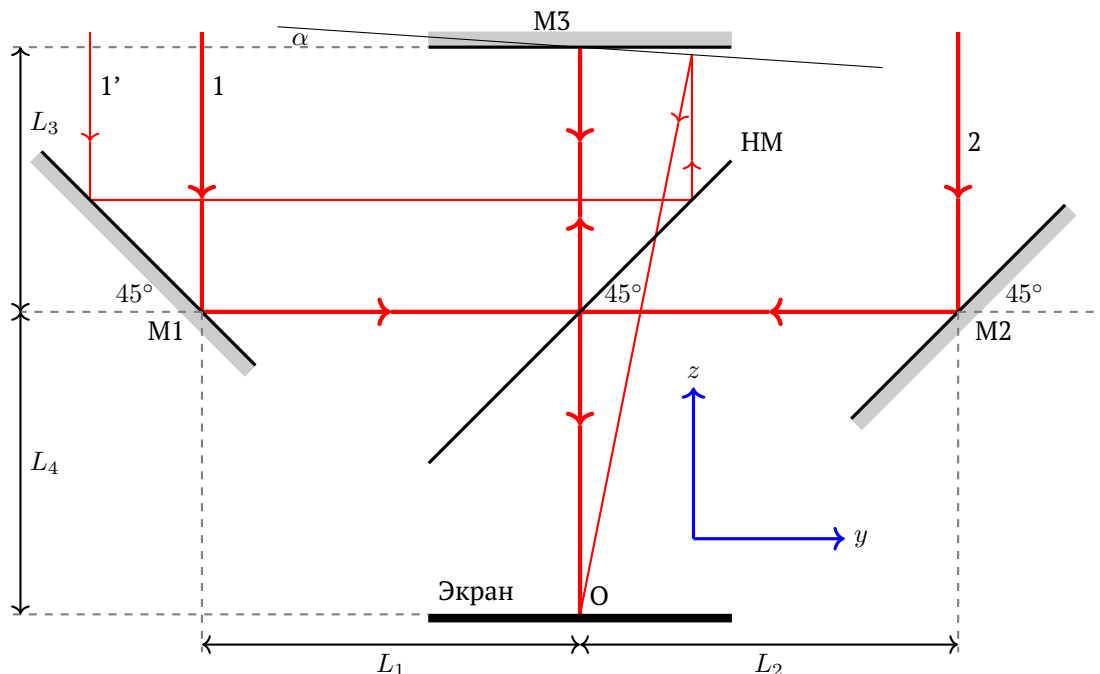


Рис. 1. Ход лучей света, приходящих от звезды.

Отражаясь от зеркала M1, луч 1 попадает на светоделитель HM, который отражает 50% света по интенсивности и пропускает остальные 50%. Отражённый луч попадает на зеркало M3, отразившись от которого проходит сквозь HM и падает на экран. В это же время луч 2 отражается от зеркала M2. Отразившись от HM, он также попадает на экран. Считайте, что зеркала M1, M2, M3 отражают весь падающий на них свет, добавляя при этом к его фазе π радиан. Длина волны используемого света равна λ .

Часть А. Лучи, параллельные оси z (1.6 балла)

A1 Рассмотрим случай, когда лучи 1 и 2 параллельны оси z , а зеркало M3 параллельно плоскости xy . Найдите разность оптических путей Δ_{12} между лучами 1 и 2, если они оба падают на экран в точке O. **0.2**

A2 Рассмотрим случай, когда зеркало M3 отклоняют на угол α от плоскости xy путём вращения вокруг оси x (см. рис. 1). Если луч 1' падает на экран в точке O, найдите разность оптических путей $\Delta_{1'2}$ между лучами 1' и 2. Покажите, что в первом приближении разность хода не зависит от α и упростите ваш ответ при $\alpha \ll 1$. **1.4**

Часть В. Лучи под углом θ в плоскости yz (4.7 балла)

Пусть теперь лучи падают на интерферометр под углом $\theta \ll 1$ к оси z в плоскости yz , как показано на рисунке ниже. Как и в A2, зеркало M3 отклонено на угол α . *Примечание:* Далее во всех пунктах задачи работайте только в линейном приближении при вычислении оптических путей, т.е. пренебрегайте членами, содержащими множители α^2 , θ^2 , $\alpha\theta$ и т.п.

B1 Пусть лучи 1 и 2 падают в фиксированные точки зеркал M1 и M2 соответственно. Покажите в листах решений, что в первом приближении оптические пути лучей 1 и 2 от точек отражения от зеркал M1 и M2 соответственно до экрана не зависят от углов θ и α . **0.8**

Road to IPhO

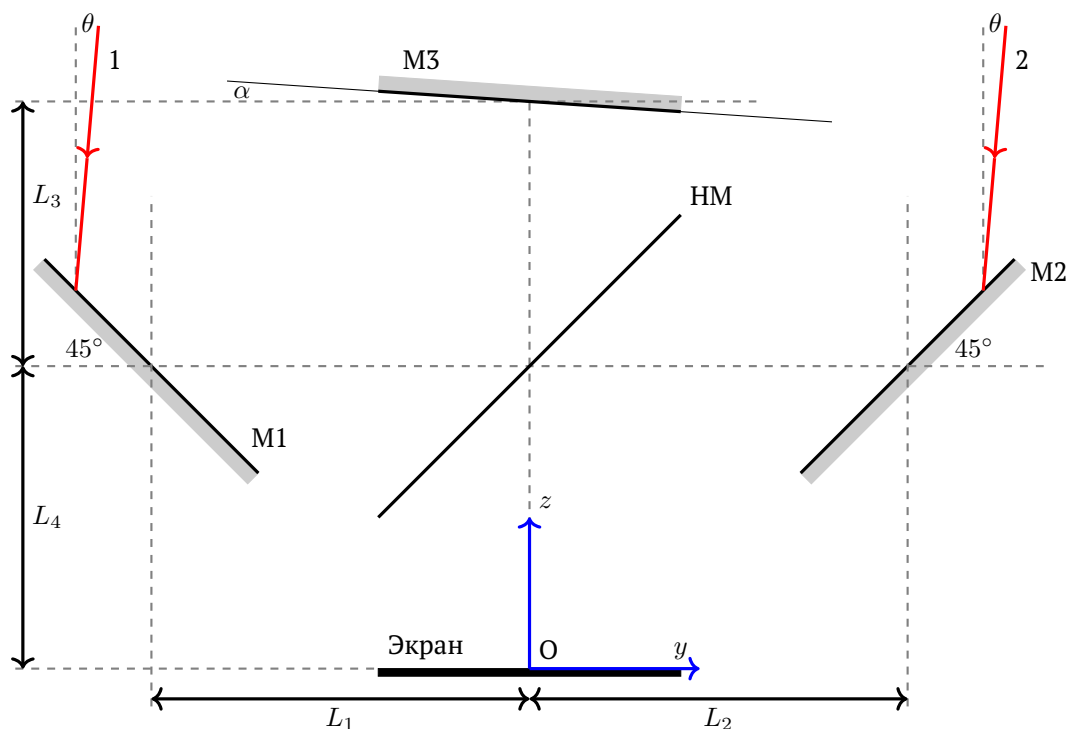


Рис. 2. Лучи, движущиеся под углом θ в плоскости yz и падающие на экран в точке O .

- B2** Пусть углы α и θ зафиксированы, а положения точек падения лучей 1 и 2 на зеркала M1 и M2 соответственно могут изменяться. Покажите в листах решений, что оптические пути лучей 1 и 2 от пунктирной линии, соответствующей координате $z_{\text{п}} = L_3 + L_4$ (подразумеваются точки пересечения пунктирной линии с траекториями лучей 1 и 2 до падений на зеркала M1 и M2 соответственно), до экрана в первом приближении не зависят от углов θ и α . **0.8**

Если лучи 1 и 2 падают на экран в точке O , разность фаз между ними может быть записана в виде:

$$\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} b\theta + \delta_O.$$

- B3** Выразите b и δ_O через λ , L_1 , L_2 , L_3 , L_4 . **1.0**

Если луч 1', отражённый от зеркала M1, и луч 2', отражённый от зеркала M2, падают в одну и ту же точку на экране с координатой y , разность фаз между ними может быть записана в виде:

$$\delta_{1'2'} = \frac{2\pi}{\lambda} b\theta + \delta_y.$$

- B4** Покажите в листах решений, что **0.6**

$$\delta_y = \delta_O - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha y$$

Примечание: Далее во всех пунктах задачи можно пользоваться утверждениями пунктов **B1-B4**, даже если они не доказаны.

- B5** Таким образом, на экране возникнет интерференционная картина. Найдите расстояние y_1 до ближайшего к точке O интерференционного максимума. Найдите также расстояние Δy_m между двумя соседними интерференционными максимумами. Приведите численные ответы в случае $L_1 = 0.50$ м, $L_2 = 1.50$ м, $L_3 = 0.50$ м, $L_4 = 1.00$ м, $\alpha = 10^{-4}$, $\theta = 10^{-5}$, $\lambda = 500$ нм. **0.6**

Road to IPhO

- В6** Найдите, как интенсивность $I(y)$ на экране зависит от координаты y , если её максимальное значение равно I_0 , подставив сюда численные значения из предыдущего пункта. Учтите влияние светоделителя на интенсивность прошедшего света. **0.9**

Часть С. Ну совсем произвольные лучи (1.0 балла)

Пусть теперь лучи 1" и 2" падают на интерферометр под углом $\theta_x \ll 1$ к плоскости yz и под углом $\theta_y \ll 1$ к плоскости xz (см. рис. 3).

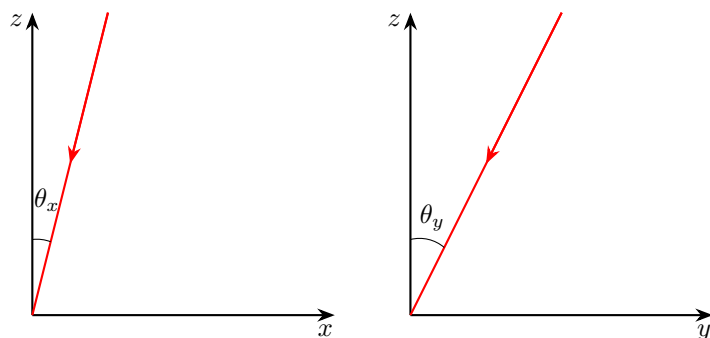


Рис. 3

- С1** Выразите волновой вектор $\vec{k}$ падающих лучей через θ_x, θ_y , модуль волнового вектора $k = 2\pi/\lambda$ и единичные орты координатных осей. **0.4**

Итак, пусть луч "1", отражённый от зеркала M1, и луч "2", отражённый от зеркала M2, падают в одну и ту же точку на экране на оси y на расстоянии y от точки O .

- С2** Выразите разность фаз между лучами 1" и 2" через $\lambda, L_1, L_2, L_3, L_4, \theta_x, \theta_y, \alpha, y$. **0.6**

Часть D. Измерение радиуса (2.7 балла)

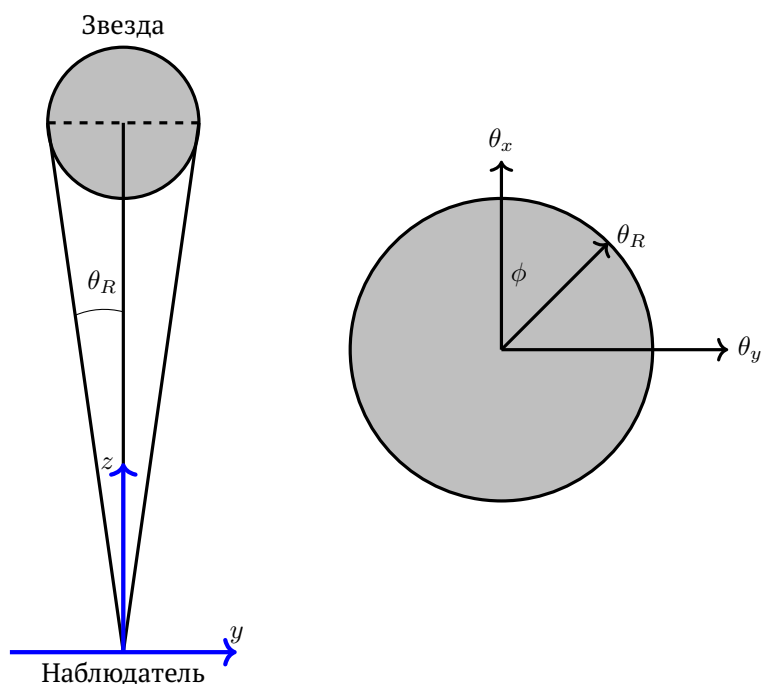


Рис. 4. Слева: вид сбоку на звезду и наблюдателя; справа: вид диска звезды из точки наблюдения.

Рассмотрим звезду с угловым радиусом θ_R , который нам необходимо определить. Для простоты будем считать, что звезда излучает как однородный диск, т.е. интенсивность света, приходящего из телесного уг-

Road to IPhO

ла $d\Omega = d\theta_x d\theta_y$, равна $\mathcal{I} d\Omega$, где $\mathcal{I}$ – постоянная величина в любом направлении внутри диска звезды. Пусть интерферометр (а точнее, ось z) направлен точно в центр звезды. При $\alpha > 0$ на экране будет наблюдаться интерференционная картина. Обозначим минимальную и максимальную интенсивности на экране вдоль оси y как $I_{y(min)}$ и $I_{y(max)}$ соответственно. Введём видность V интерференционной картины как:

$$V = \frac{I_{y(max)} - I_{y(min)}}{I_{y(max)} + I_{y(min)}}.$$

- D1** Запишите V в виде интеграла по одной переменной. Явно производить интегрирование при этом необязательно. *Подсказка:* интеграл некоторой функции $f(\theta_y)$, зависящей только от θ_y , по поверхности диска радиусом θ_R можно представить в виде: **1.8**

$$I = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} d\theta_y \int_{-\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2}}^{\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2}} d\theta_x f(\theta_y) = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} d\theta_y \cdot 2\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} f(\theta_y).$$

Интерферометр используется для наблюдения Бетельгейзе. Если симметрично отдалять зеркала М1 и М2 от центра НМ (так что $L_1^* = L_1 + d/2$ и $L_2^* = L_2 + d/2$), то видность V обнулится при $d = 0.97$ м, 3.12 м, ... (параметры системы те же, что и в В3). В данной части задачи L_1 и L_2 численно не заданы, а $\lambda = 500$ нм.

- D2** Найдите угловой радиус Бетельгейзе θ_R . Найдите её радиус R , если расстояние до неё $h = 6.079 \cdot 10^{15}$ км. **0.9**
Подсказка: Первые два нуля интеграла

$$F_n = \int_0^1 (1 - w^2)^n \cos(\eta w) dw$$

как функции η приведены в таблице ниже.

n	η_1	η_2
0.5	3.832	7.016
0	4.493	7.725
1.5	5.136	8.417