

A1 0.70

Пусть зависимость энергии электрона от импульса имеет вид

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0(3 - \cos(ap_x) - \cos(ap_y) - \cos(ap_z)).$$

Найдите его ускорение в момент времени, когда импульс равен $p_x = \frac{\pi}{2a}$, $p_y = \frac{\pi}{3a}$, $p_z = 0$, а компоненты действующей на электрон силы F_x , F_y , F_z .

Выразим скорость электрона через его импульс:

$$v_x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} = \varepsilon_0 a \sin(ap_x),$$

аналогично для остальных двух компонент

$$v_y = \varepsilon_0 a \sin(ap_y), \quad v_z = \varepsilon_0 a \sin(ap_z).$$

Из уравнения движения $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$. Выразим ускорение через производную импульса:

$$a_x = \dot{v}_x = \varepsilon_0 a^2 \cos(ap_x) \dot{p}_x = \varepsilon_0 a^2 \cos(ap_x) F_x.$$

Формулы остальных компонент аналогичны. Для значений импульса из условия

Ответ:

$$a_x = 0, \quad a_y = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a^2 F_y, \quad a_z = \varepsilon_0 a^2 F_z.$$

A2 0.80

Пусть электрон с $\varepsilon(\vec{p})$ из A1 движется в постоянном электрическом поле величины E , направленном вдоль оси x . Начальные координаты и проекции импульса равны нулю. Заряд электрона $-q$. Найдите его закон движения $x(t)$.

На электрон действует сила $F_x = -qE$, поэтому импульс

$$p_x = -qEt,$$

а соответствующая скорость

$$v_x = -a\varepsilon_0 \sin(aqEt).$$

Остальные проекции скорости равны нулю. Интегрируя, найдем зависимость координаты x от времени

Ответ:

$$x(t) = -\frac{\varepsilon_0}{qE}(1 - \cos(aqEt))$$

A3 0.50

Концентрация свободных электронов в некотором веществе равна n , зависимость $\varepsilon(p)$ как в A1. В начальный момент времени включается постоянное электрическое поле E , направленное вдоль оси x . Найдите зависимость плотности тока j от времени.

Плотность тока выражается через скорость и концентрацию электронов

$$j_x = -nqv_x = nqa\varepsilon_0 \sin(aqEt).$$

Ответ:

$$j_x = nqa\varepsilon_0 \sin(aqEt).$$

B1 0.50

Пусть зависимость энергии от импульса $\varepsilon(\vec{p})$ произвольна. Докажите, что энергия ε и проекция импульса на направление магнитного поля сохраняются.

Уравнение движения

$$\dot{\vec{p}} = -q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Производная энергии по времени

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_y} \dot{p}_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_z} \dot{p}_z = v_x \dot{p}_x + v_y \dot{p}_y + v_z \dot{p}_z = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

Подставляя выражение для производной импульса, получим

$$\dot{\varepsilon} = \vec{v} \cdot (-q\vec{v} \times \vec{B}) = 0.$$

Умножив уравнение движения скалярно на магнитное поле получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{B}\vec{p}) = \vec{B}\dot{\vec{p}} = -q\vec{B}(\vec{v} \times \vec{B}) = 0,$$

то есть проекция импульса на магнитное поле постоянна.

Ответ:

$$\dot{\varepsilon} = \vec{v} \cdot (-q\vec{v} \times \vec{B}) = 0.$$

B2 1.10

Пусть зависимость энергии от импульса имеет вид

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y}.$$

Энергия электрона равна ε . Найдите частоту движения ω . Изобразите траекторию движения частицы на плоскости xy , укажите характерные размеры и направление движения. Начало координат поместите в центре симметрии траектории.

Запишем уравнения движения:

$$\begin{aligned} m_x \dot{v}_x &= -qv_y B; \\ m_y \dot{v}_y &= qv_x B. \end{aligned}$$

Исключим из первого уравнения v_y продифференцировав его и выразив $\dot{v}_y$ из второго уравнения. Получим

$$m_x \ddot{v}_x = -q\dot{v}_y B = -\frac{q^2 B^2}{m_y} v_x,$$

то есть

$$\ddot{v}_x = -\frac{q^2 B^2}{m_x m_y} v_x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \frac{qB}{\sqrt{m_x m_y}}.$$

Зависимость скорости от времени имеет вид

$$v_x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуду A можно найти, зная энергию электрона:

$$A = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_x}}.$$

Вторую компоненту скорости можно найти из уравнения движения

$$v_y = -\frac{m_x}{qB} \dot{v}_x = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_x}} \frac{\omega}{qB} \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_y}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Интегрируя, получим траекторию частицы

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_x}} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{2m_y \varepsilon}}{qB} \sin(\omega t + \varphi); \\ y(t) &= -\frac{\sqrt{2m_x \varepsilon}}{qB} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

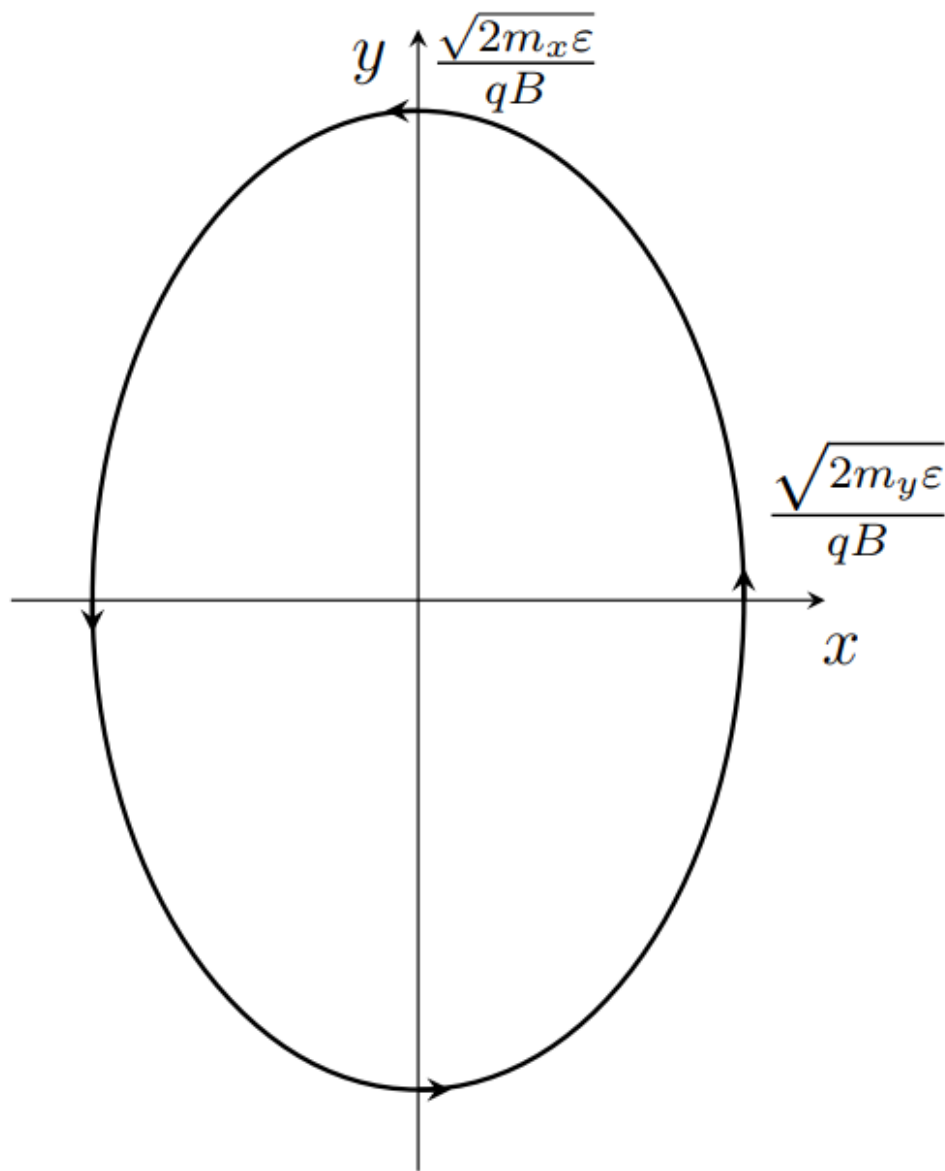
Таким образом, траектория представляет собой эллипс с полуосями

$$A_x = \frac{\sqrt{2m_y \varepsilon}}{qB}, \quad A_y = \frac{\sqrt{2m_x \varepsilon}}{qB}.$$

Движение происходит против часовой стрелки.

Ответ:

$$\omega = \frac{qB}{\sqrt{m_x m_y}}, \quad A_x = \frac{\sqrt{2m_y \varepsilon}}{qB}, \quad A_y = \frac{\sqrt{2m_x \varepsilon}}{qB}.$$



ВЗ^{0.60} Найдите годограф вектора импульса электрона (траекторию, по которой движется конец вектора импульса, если его откладывать от одной точки). Изобразите его на плоскости p_x, p_y . Укажите характерные размеры.

С учетом электрического поля уравнения движения

$$\begin{aligned} m_x \dot{v}_x &= -qE - qv_y B; \\ m_y \dot{v}_y &= qv_x B. \end{aligned}$$

Введем новую переменную u_y с помощью соотношения

$$v_y = -\frac{E}{B} + u_y,$$

тогда уравнения движения примут такой же вид, как и в предыдущей части:

$$\begin{aligned} m_x \dot{v}_x &= -qu_y B; \\ m_y \dot{u}_y &= qv_x B. \end{aligned}$$

Начальные условия

$$v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = 0, \quad u_y(0) = \frac{E}{B}.$$

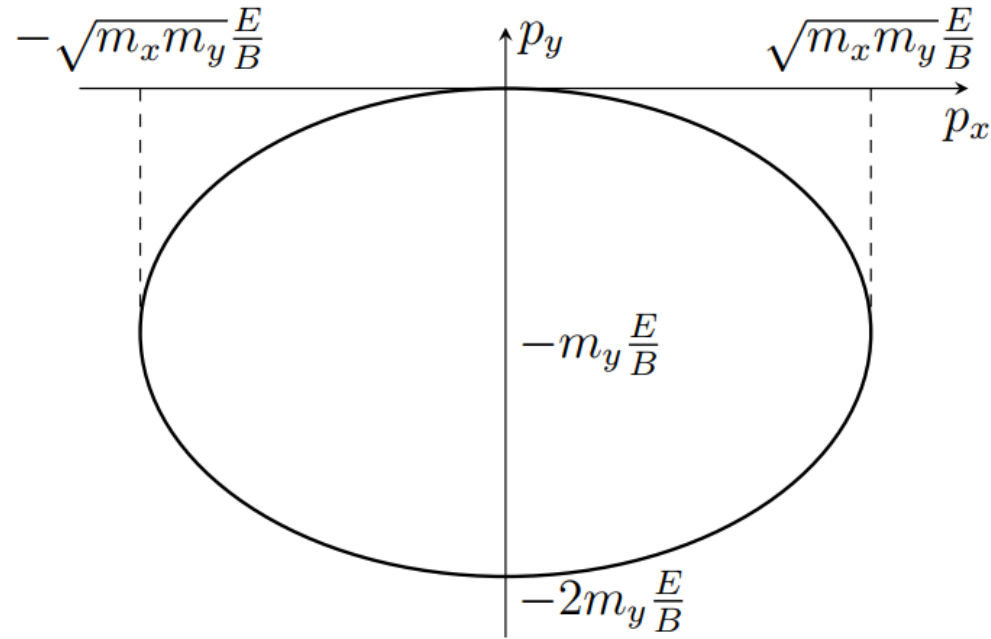
С учетом этого решение

$$v_x = -\sqrt{\frac{m_y}{m_x}} \frac{E}{B} \sin \omega t; \quad v_y = -\frac{E}{B} (1 - \cos \omega t).$$

Тогда импульсы

$$p_x = -\sqrt{m_x m_y} \frac{E}{B} \sin \omega t, \quad p_y = -m_y \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t).$$

Ответ:



B4^{0.40}

Найдите закон движения $x(t), y(t)$.

Интегрируя скорости из предыдущего пункта, получим

Ответ:

$$x(t) = -\frac{m_y E}{qB^2} (1 - \cos \omega t)$$

$$y(t) = -\frac{E}{B} t + \frac{\sqrt{m_x m_y} E}{qB^2} \sin \omega t, \quad \omega = \frac{qB}{\sqrt{m_x m_y}}.$$

B5^{1.40}

Если энергия больше минимального значения, траектории на плоскости становятся незамкнутыми, и частица может неограниченно далеко некотором направлении. Найдите эту минимальную энергию ε_{min} . При энергии $\varepsilon > \varepsilon_{min}$ изобразите траекторию, укажите характерные геометрические размеры.

Запишем уравнения движения

$$\dot{\vec{p}} = -q\vec{v} \times \vec{B} = -q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Интегрируя, получаем

$$\Delta \vec{p} = -q\Delta \vec{r} \times \vec{B}.$$

Умножим это равенство векторно на $\vec{B}$.

$$\Delta \vec{p} \times \vec{B} = -q(\Delta \vec{r} \times \vec{B}) \times \vec{B} = qB^2 \Delta \vec{r}.$$

Таким образом, вектор перемещения можно выразить через изменение импульса

$$\Delta \vec{r} = \frac{1}{qB^2} \Delta \vec{p} \times \vec{B}.$$

Рассмотрим сначала в импульсном пространстве. Из постоянства энергии следует, что годограф импульса – поверхность

$$\frac{p_y^2}{2m_y} + \varepsilon_0(1 - \cos ap_x) = \varepsilon = \text{const}.$$

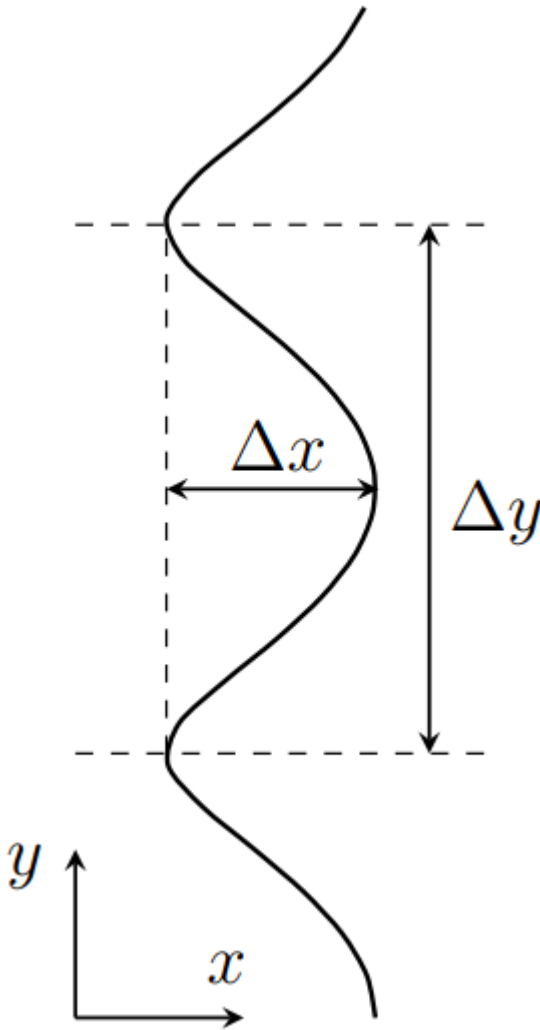
Уравнение этой поверхности можно представить в виде

$$p_y = \pm \sqrt{2m_y(\varepsilon - \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cos ap_x)}.$$

В том случае, если $\varepsilon \leq 2\varepsilon_0$, годограф представляет собой замкнутую кривую. Тогда траектория также будет замкнутой кривой. Если же $\varepsilon > 2\varepsilon_0$, годограф импульса – незамкнутая кривая, направленная вдоль оси x . Тогда траектория движения частицы – кривая, направленная вдоль y , причем зависимость $x(y)$ – периодическая. Найдём период этой функции и ширину полосы вдоль оси x , которую она занимает.

$$\Delta y = \frac{1}{qB} \frac{2\pi}{a}, \quad \Delta x = \frac{1}{qB} \Delta p_y = \frac{\sqrt{2m_y}}{qB} (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon - 2\varepsilon_0}).$$

Ответ:



C1 ^{0.50} Сначала пренебрежем дисперсией и рассмотрим случай $\alpha = 0$. При каких углах θ_1, θ_2 возможен распад?

Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$up = uq_1 + uq_2, \vec{p} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2.$$

Поскольку длина вектора $\vec{p}$ равна сумме длин остальных двух векторов, все три вектора должны быть направлены в одну и ту же сторону.

Ответ: $\theta_1 = \theta_2 = 0$

C2 ^{0.50} Выразите модуль импульса второго фонона q_2 через p, q_1, θ_1 . Получите выражение выражение в пределе малых θ_1 с точностью до второго порядка по θ_1 .

Из закона сохранения импульса

$$\vec{q}_2 = \vec{p} - \vec{q}_1.$$

Отсюда

$$q_2^2 = p^2 + q_1^2 - 2pq_1 \cos \theta_1 = p^2 + q_1^2 - 2pq_1(1 - \theta_1^2/2) = (p - q_1)^2 + pq_1\theta_1^2.$$

Извлечем корень и разложим в ряд до требуемого порядка

$$q_2 = \sqrt{(p - q_1)^2 + pq_1\theta_1^2} \approx p - q_1 + \frac{pq_1}{2(p - q_1)}\theta_1^2$$

C3 ^{1.20} Зависимость импульса излучаемого фонона от угла при малых углах имеет вид

$$q_1(\theta_1) = A + B\theta_1.$$

Определите постоянные A, B . Выразите их через p, u, α .

Запишем закон сохранения энергии

$$up + \alpha p^3 = uq_1 + \alpha q_1^3 + uq_2 + \alpha q_2^3.$$

Подставим выражение для q_2 :

$$up + \alpha p^3 = uq_1 + \alpha q_1^3 + u \left(p - q_1 + \frac{pq_1}{2(p - q_1)}\theta_1^2 \right) + \alpha \left(p - q_1 + \frac{pq_1}{2(p - q_1)}\theta_1^2 \right)^3.$$

Раскроем скобки и оставим вклады порядка θ_1^2 :

$$\alpha p^3 = \alpha q^3 + \frac{upq_1}{2(p-q_1)}\theta_1^2 + \alpha(p-q_1)^3 + \frac{3\alpha}{2}pq_1(p-q_1)\theta_1^2.$$

Перенесем слагаемые, не зависящие от угла, налево:

$$\alpha(p^3 - q_1^3 - (p - q_1)^3) = \frac{upq_1\theta_1^2}{2(p-q_1)}\left(1 + \frac{3\alpha}{u}(p-q_1)^2\right).$$

Вторым слагаемым в скобках в правой части можно пренебречь в силу условия $\alpha p^3 \ll up$, в левой части раскроем скобки и получим

$$3\alpha(p-q_1)pq_1 = \frac{upq_1\theta_1^2}{2(p-q_1)}.$$

Отсюда

$$(p-q_1)^2 = \frac{u}{6\alpha}\theta_1^2, \quad q_1 = p - \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}\theta_1.$$

Ответ:

$$A = p, \quad B = -\sqrt{\frac{u}{6\alpha}}.$$

C4 0.30

При каком знаке постоянной α распад возможен?

У уравнения в предыдущем пункте есть решение, если $\alpha > 0$.

Ответ: $\alpha > 0$

C5 0.50

Найдите максимальный угол θ_{max} , под которым может излучаться фотон. При каком условии на p импульс фотона можно считать малым?

Максимальный угол достигается при минимальном импульсе испускаемого фотона $q_1 \rightarrow 0$. Тогда из выражения для q_1 находим

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{6\alpha}{u}}p.$$

Вся задача решалась в приближении малых углов. Это приближение работает при условии $\theta_{max} \ll 1$, то есть

$$p \ll \sqrt{\frac{u}{\alpha}}.$$

Ответ:

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{6\alpha}{u}}p.$$

C6 1.00

Выразите угол θ_2 , под которым излучается второй фотон, через θ_1, p, u, α . Считайте углы малыми, учитывайте вклады первого порядка по θ_1, θ_2 .

Из результатов C3 следует, что импульсы фотонов выражаются через углы излучения как

$$q_1 = p - \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}\theta_1, \quad q_2 = p - \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}\theta_2.$$

Запишем проекцию закона сохранения импульса на ось, перпендикулярную направлению движения исходного фотона:

$$\begin{aligned} q_1\theta_1 &= q_2\theta_2, \\ p\theta_1 - \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}\theta_1^2 &= p\theta_2 - \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}\theta_2^2. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$p(\theta_1 - \theta_2) = \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}(\theta_1^2 - \theta_2^2), \quad p = \sqrt{\frac{u}{6\alpha}}(\theta_1 + \theta_2).$$

Ответ:

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{6\alpha}{u}}p - \theta_1$$