

A1 ^{0.30} Рассмотрим кольцо, заряженное равномерно по периметру зарядом Q и вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью Ω . Найдите эквивалентную силу тока i в кольце.

Первое решение: За время оборота $T = 2\pi/\Omega$ каждый элементарный заряд проходит через точку кольца, откуда:

$$i = \frac{Q}{T}$$

Второе решение: Также результат может быть получен с помощью выражения:

$$i = \lambda v$$

где $v = \Omega R$ - скорость элементов кольца. Оба выражения приводят к ответу:

Ответ:

$$i = \frac{\Omega Q}{2\pi}$$

A2 ^{1.00} Определите магнитный момент шара $\vec{m}$. Ответ выразите через $\vec{\omega}$, q и r .

Первое решение: Магнитный момент системы определяется соотношением:

$$\vec{m} = \int \frac{[\vec{r} \times \vec{v}] dq}{2}$$

где dq - элементарный заряд, а $\vec{r}$ и $\vec{v}$ - его радиус-вектор и скорость соответственно.

Заметим, что момент импульса механической системы определяется соотношением:

$$\vec{L} = \int [\vec{r} \times \vec{v}] dM$$

где dM - элементарная масса, а $\vec{r}$ и $\vec{v}$ - её радиус-вектор и скорость соответственно.

Если распределения заряда и массы подобны, то мы приходим к следующему соотношению:

$$\vec{m} = \frac{\vec{L}q}{2M} = \frac{Iq\vec{\omega}}{2M}$$

где $I = 2Mr^2/5$ - момент инерции однородного шара относительно диаметра.

Второе решение: рассмотрим диск радиусом R и толщиной h с плотностью заряда ρ и вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг своей оси вращения. Выделим кольцо радиусом r толщиной dr . Тогда для магнитного момента кольца получим:

$$d\vec{m}_d = \vec{n}S \cdot \frac{\omega dQ}{2\pi}$$

где $S = \pi r^2$ - площадь кольца. Преобразуем:

$$d\vec{m}_d = \vec{\omega} \cdot \frac{2\pi r^3 dr h \rho}{2} \Rightarrow \vec{m}_d = \frac{\pi R^4 h \rho \vec{\omega}}{2}$$

Перейдём к шару. Будем характеризовать h и R углом θ с осью симметрии шара. Тогда:

$$R = r \sin \theta \quad h = -r \cos \theta$$

Тогда для элемента магнитного момента шара имеем:

$$d\vec{m} = \frac{\pi r^5 \rho \vec{\omega}}{4} \sin^5 \theta d\theta \Rightarrow \vec{m} = \frac{\pi r^5 \rho \vec{\omega}}{4} \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{\pi r^5 \rho \vec{\omega}}{4} \int_{-1}^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \frac{4\pi r^5 \rho \vec{\omega}}{15}$$

Для ответа на вопрос осталось подставить $\rho = 3q/4\pi r^3$.

Третье решение: рассмотрим тонкостенную сферическую оболочку радиусом R толщиной dR , вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Выделим кольцо, ограниченной углами θ и $\theta + d\theta$ сферической системы координат. Магнитный момент выделенного кольца равен:

$$d\vec{m}_{сф} = \frac{dQ\vec{\omega}}{2\pi} \cdot \pi R^2 \sin^2 \theta = \vec{\omega} \cdot \frac{2\pi \rho R^2 dR \sin \theta d\theta}{2\pi} \cdot \pi R^2 \sin^2 \theta = \pi \rho R^4 dR \vec{\omega} \cdot \sin^3 \theta d\theta$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\vec{m}_{сф} = \pi \rho R^4 dR \vec{\omega} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \pi \rho R^4 dR \vec{\omega} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4\pi \rho R^4 dR \vec{\omega}}{3}$$

Магнитный момент шара получается интегрированием магнитного момента по сферам:

$$\vec{m} = \frac{4\pi \rho \vec{\omega}}{3} \int_0^r R^4 dR = \frac{4\pi \rho r^5 \vec{\omega}}{15}$$

Для ответа на вопрос осталось подставить $\rho = 3q/4\pi r^3$.

Окончательно:

Ответ:

$$\vec{m} = \frac{qr^2\vec{\omega}}{5}$$

А3^{0.20}

Найдите момент сил $\vec{M}$, действующих на шар, относительно его центра. Ответ выразите через $\vec{\omega}$, $\vec{B}$, q и r .

Момент сил $\vec{M}$, действующих на виток с током в однородном магнитном поле, равен:

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}]$$

откуда:

Ответ:

$$\vec{M} = \frac{qr^2[\vec{\omega} \times \vec{B}]}{5}$$

В1^{0.50}

Запишите условие отсутствия проскальзывания шара по плоскости через $\vec{v}_C$, $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Используя полученное выражение, выразите компоненты угловой скорости ω_x и ω_y через v_{Cx} , v_{Cy} и r .

Дифференцируя по времени условие отсутствия проскальзывания, выразите $\vec{a}_C$ через $\dot{\vec{\omega}}$ и $\vec{r}$.

Если твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, а скорость точки A равна $\vec{v}_A$, то скорость точки B задаётся выражением:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}]$$

Отсюда получим условие отсутствия проскальзывания:

Ответ:

$$\vec{v}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}] = 0$$

Спроецируем полученное уравнение на оси x и y :

$$v_{Cx} - \omega_y r = 0 \quad v_{Cy} + \omega_x r = 0$$

Отсюда:

Ответ:

$$\omega_x = -\frac{v_{Cy}}{r} \quad \omega_y = \frac{v_{Cx}}{r}$$

Вектор $\vec{r}$ остаётся постоянным, поскольку шар движется по плоскости. Тогда дифференцируя, получим:

Ответ:

$$\vec{a}_C = -[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]$$

В2^{0.20}

Используя уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс, выразите угловое ускорение шара $\dot{\vec{\omega}}$ через q , m , r , $\vec{\omega}$, $\vec{r}$, $\vec{B}$ и $\vec{F}$.

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C$$

Для момента сил относительно центра масс имеем:

$$\vec{M}_C = [\vec{r} \times \vec{F}] + \frac{qR^2[\vec{\omega} \times \vec{B}]}{5}$$

а для производной момента импульса по времени имеем:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = I\dot{\vec{\omega}}$$

откуда:

Ответ:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{5[\vec{r} \times \vec{F}]}{2mr^2} + \frac{q[\vec{\omega} \times \vec{B}]}{2m}$$

В3^{0.20}

Выразите силу трения $\vec{F}$ через $m, q, \vec{B}, \vec{\omega}, \vec{r}$ и $\vec{a}_C$.

Примечание: Воспользуйтесь свойством двойного векторного произведения:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Рассмотрим векторное произведение с $\vec{r}$ слагаемых в уравнении, полученном в пункте В3:

$$I[\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}] = [\vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{F}]] + \frac{qr^2[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{B}]]}{5}$$

Учитывая, что $\vec{a}_C = [\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}]$, и используя свойство двойного векторного произведения с учётом $\vec{r} \perp \vec{F}, \vec{r} \perp \vec{B}$, получим:

$$I\vec{a}_C = -r^2\vec{F} - \frac{qr^2\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{5}$$

откуда:

Ответ:

$$\vec{F} = -\frac{2m\vec{a}_C}{5} - \frac{q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{5}$$

В4^{0.80}

Найдите компоненту угловой скорости шара ω_z в точке с координатой x_C его центра. Ответ выразите через q, m, B, r и x_C .

Поскольку векторы $\vec{r}$ и $\vec{e}_z$ коллинеарные, уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось z записывается следующим образом:

$$I\dot{\omega}_z = \frac{qr^2[\vec{\omega} \times \vec{B}]_z}{5} = -\frac{qr^2B\omega_y}{5} \Rightarrow \dot{\omega}_z = -\frac{qB\omega_y}{2m}$$

С другой стороны, $\omega_y r = v_x$, откуда:

$$\dot{\omega}_z = -\frac{qBv_x}{2mr}$$

и окончательно:

Ответ:

$$\omega_z = -\frac{qBx_C}{2mr}$$

В5^{0.40}

Докажите, что траектория центра шара является прямолинейной.

Запишем теорему о движении центра масс:

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + q[\vec{v}_C \times \vec{B}]$$

Подставляя выражение для $\vec{F}$, полученное в пункте В3, получим:

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + q[\vec{v}_C \times \vec{B}] - \frac{2m\vec{a}_C}{5} - \frac{q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{5}$$

откуда:

$$\vec{a}_C = \frac{5\vec{g}}{7} + \frac{5\vec{N}}{7m} + \frac{5q[\vec{v}_C \times \vec{B}]}{7m} - \frac{q\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{7m}$$

Обратим внимание, что все силы лежат в плоскости xz , значит, движение является одномерным, поскольку изначально шар был неподвижен

B6 ^{0.50} Найдите проекцию ускорения центра a_{Cx} шара на ось x в зависимости от положения его центра x_C .

Проецируя ускорение центра шара на ось x :

$$a_{Cx} = \frac{5g \sin \alpha}{7} + \frac{qBr\omega_z}{7m}$$

Подставляя выражение для ω_z , получим:

Ответ:

$$a_{Cx} = \frac{5g \sin \alpha}{7} - \frac{q^2 B^2 x}{14m^2}$$

B7 ^{0.70} Определите зависимость координаты x_C центра шара от времени t . Ответ выразите через g, α, q, m, B и t .

Вводя переменную $x' = x - 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$, получим:

$$\ddot{x}' = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \frac{x'}{14}$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = qB/m\sqrt{14}$.

Тогда общее решение для $x(t)$:

$$x(t) = 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 + A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Учтём начальные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \pi \\ A = 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \end{cases}$$

Для для $x(t)$ имеем:

Ответ:

$$x(t) = 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(1 - \cos \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right) \right)$$

B8 ^{0.50} Опишите эволюцию угловой скорости шара $\vec{\omega}$. В качестве ответ укажите годограф вектора угловой скорости (в системе координат xyz), т.е кривой, описывающей положения конца вектора при его фиксированном начале. Укажите на рисунке все характерные значения. Выразите их через m, g, q, B, α и r .

Вектор угловой скорости шара всегда лежит в плоскости yz .

Для ω_z имеем:

$$\omega_z(t) = -\frac{qBx(t)}{2mr} = -\frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \left(1 - \cos \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right) \right)$$

Для ω_y имеем:

$$\omega_y(t) = \frac{v_{Cx}(t)}{r} = \frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \sqrt{\frac{2}{7}} \sin \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right)$$

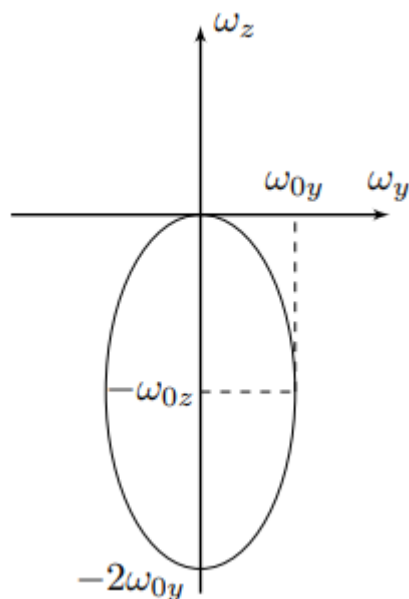
Отсюда:

$$\sin^2 \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right) + \cos^2 \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right) = \left(\frac{\omega_y}{\frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \sqrt{\frac{2}{7}}} \right)^2 + \left(1 + \frac{\omega_z}{\frac{5mg \sin \alpha}{qBr}} \right)^2 = 1$$

Из полученных соотношений видно, что годограф вектора угловой скорости является эллипсом с полуосями ω_{0z} и ω_{0y} , равными:

$$\omega_{0z} = \frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \quad \omega_{0y} = \frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \sqrt{\frac{2}{7}}$$

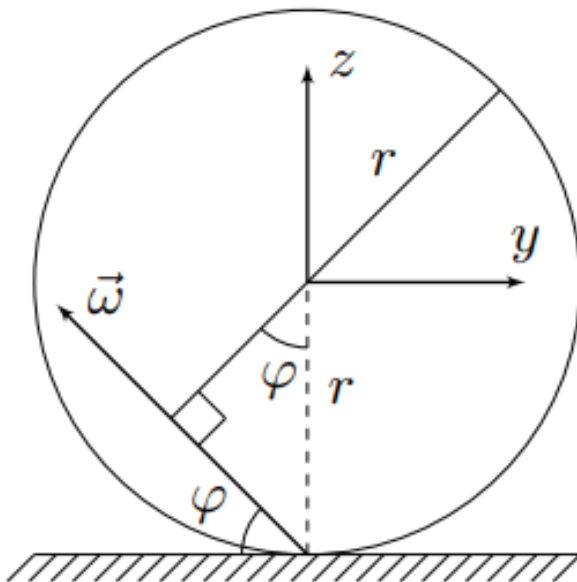
Ответ:



B9^{0.60} Найдите максимальную скорость v_{max} среди всех элементов шара в момент, когда скорость центра достигает своего максимума. Ответ выразите через m, g, q, B и α .

Пусть ω - модуль угловой скорости, образующей угол φ с плоскостью. Максимальной является скорость той точки, расстояние которой до мгновенной оси вращения шара максимально. Далее имеет смысл рассматривать только сечение, лежащее в плоскости yz . Из рисунка видно, что максимальная скорость элемента шара достигается на перпендикуляре к мгновенной оси вращения, проходящем через центр, и равна:

$$v_{max} = \omega r(1 + \cos \varphi)$$



Для компонент угловой скорости имеем:

$$\omega_y = \omega \cos \varphi \quad \omega_z = -\omega \sin \varphi$$

Из уравнения эллипса получим:

$$\frac{\omega^2 \cos^2 \varphi}{\omega_{0y}^2} + \frac{(\omega_{0z} - \omega \sin \varphi)^2}{\omega_{0z}^2} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2\omega_{0z} \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + \frac{\omega_{0z}^2 \cos^2 \varphi}{\omega_{0y}^2}}$$

Отсюда для максимальной скорости имеем:

$$v_{max} = \frac{2\omega_{0z} r \sin \varphi (1 + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + \frac{\omega_{0z}^2 \cos^2 \varphi}{\omega_{0y}^2}} = \frac{2\omega_{0z} r \tan \varphi (1 + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi})}{\tan^2 \varphi + \frac{\omega_{0z}^2}{\omega_{0y}^2}}$$

В рассматриваемый момент $\tan \varphi = \omega_{0z}/\omega_{0y}$, поэтому:

$$v_{max} = \omega_{0y} r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_{0z}^2}{\omega_{0y}^2}} \right)$$

Подставляя ω_{0y} и ω_{0z} , находим:

Ответ:

$$v_{max} = \frac{5mg \sin \alpha (3 + \sqrt{2})}{qB\sqrt{7}}$$

В10^{0.60} При каком минимальном коэффициенте трения μ_{min} шара о плоскость возможно движение без проскальзывания? Ответ выразите через g , α , q , m и B .

Мы показали, что движение является одномерным, а значит сила Лоренца в любой момент равна нулю. Тогда сила нормальной реакции плоскости N в любой момент равна

$$N = mg \cos \alpha$$

Определим силу трения F_x из теоремы о движении центра масс:

$$F_x = ma_{Cx} - mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left(\frac{5}{7} \cos \left(\frac{qBt}{m\sqrt{14}} \right) - 1 \right) \geq -\frac{12mg \sin \alpha}{7}$$

откуда сила трения F_x всегда находится в следующем диапазоне:

$$-\frac{2mg \sin \alpha}{7} \geq F_x \geq -\frac{12mg \sin \alpha}{7}$$

Минимально возможный коэффициент трения определяется выражением:

$$\mu_{min} = \frac{|F_x|_{max}}{N}$$

откуда:

Ответ:

$$\mu_{min} = \frac{12 \tan \alpha}{7}$$

С1^{0.80} Определите расстояние $S_{i,i+1}$ между положениями центра шара в моменты i -й и $(i + 1)$ -й остановок. Ответ выразите через i , g , k , α , q , m и B .

Поскольку при качении происходит лишь перераспределение силы нормальной реакции - уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс остаётся верным, а в теорему о движении центра масс должно быть изменено:

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + q[\vec{v}_C \times \vec{B}] + \vec{F}_{\text{кач}}$$

где

$$\vec{F}_{\text{кач}} = \mp \vec{e}_x \cdot \frac{Nk}{r}$$

где знак $-$ соответствует движению центра шара вдоль оси x , а знак $+$ - движению в противоположную сторону.

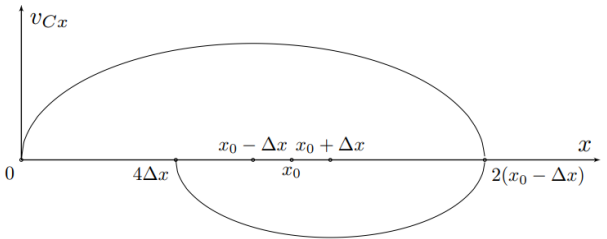
Тогда уравнение движения в проекции на ось x :

$$a_{Cx} = \frac{5g \sin \alpha}{7} \mp \frac{5kg \cos \alpha}{r} - \frac{q^2 B^2 x}{14m^2}$$

Фазовая диаграмма каждой половины колебаний представляет собой эллипс, смещённый от положения x_0 на величину $\pm \Delta x$, где:

$$x_0 = 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$$

$$\Delta x = 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \frac{k}{r \tan \alpha}$$



Из фазовой диаграммы видно, что если a_i - амплитуда половины колебания с номером i , то амплитуда половины колебания a_{i+1} с номером $i + 1$ определяется выражением:

$$a_{i+1} = a_i - 2\Delta x$$

Учитывая выражение для a_1 :

$$a_1 = x_0 - \Delta x$$

имеем:

$$a_{i+1} = x_0 - (1 + 2i)\Delta x$$

Тогда для $S_{i,i+1}$ имеем:

$$S_{i,i+1} = 2a_{i+1}$$

или же:

Ответ:

$$S_{i,i+1} = 2 \cdot 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(1 - \frac{k(1 + 2i)}{r \tan \alpha} \right)$$

C2 0.20

Определите диапазон возможных положений $x_{C\kern 0.08em\text{к}}$ последней остановки центра шара. Ответ выразите через g, k, α, q, m и B .

Качение прекращается, если в точке остановки

$$|F_{\text{кач}}| \leq kmg \cos \alpha / r$$

Этому соответствуют следующие координаты x :

Ответ:

$$x \in \left[10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(1 - \frac{k}{r \tan \alpha} \right); 10g \sin \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(1 + \frac{k}{r \tan \alpha} \right) \right]$$

C3 0.50

Найдите время τ движения шара. Ответ выразите через g, k, α, q, m и B .

Колебания происходят до тех пор, пока очередная точка остановки не окажется в диапазоне $x_{\text{ост}} \in [-\Delta x; \Delta x]$, что приводит к выражению для количества N колебаний:

$$N = \left\lceil \frac{a_1}{2\Delta x} \right\rceil + 1$$

Поскольку $\tan \alpha \gg k/r$, с хорошей точностью верно:

$$N = \frac{r \tan \alpha}{2k}$$

Для времени движение имеем:

$$t = \frac{\pi N}{\omega_0}$$

или же:

Ответ:

$$t = \frac{\pi m r \tan \alpha}{k q B} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

C4 1.00

Какое количество теплоты Q выделилось при движении шара? Ответ выразите через g, k, α, q, m и B .

Первое решение: Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$Q = -\Delta W_p - E_k$$

где ΔW_p - изменение потенциальной энергии системы, а E_k - её кинетическая энергия.

Для ΔW_p имеем:

$$\Delta W_p = -mg \sin \alpha x_0 = -10mg^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$$

Для нахождения кинетической энергии определим конечную угловую скорость верчения шара:

$$E_k = \frac{I\omega_z^2}{2} = \frac{Iq^2B^2x_0^2}{8m^2r^2} = \frac{q^2B^2}{20m} \cdot 100g^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^4 = 5mg^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$$

Первое решение: явно посчитаем работу силы трения качения. Для неё имеем:

$$A_i = -\frac{kN}{r} \cdot 2A_i = -\frac{2kmg \cos \alpha}{r} \cdot a_i$$

После подстановки a_i получим выражение для работы:

$$A = -\frac{20mg^2 \sin \alpha \cos \alpha k}{r} \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \sum_{i=1}^N \left(1 + \frac{k}{r \tan \alpha} - \frac{2ik}{r \tan \alpha} \right)$$

Суммируя, получим:

$$A = -\frac{20mg^2 \sin \alpha \cos \alpha k}{r} \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(\left(1 + \frac{k}{r \tan \alpha} \right) N - \frac{N(N+1)k}{r \tan \alpha} \right)$$

Подставляя N и учитывая малость, получим:

$$A = -\frac{20mg^2 \sin \alpha \cos \alpha k}{r} \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \left(\frac{r \tan \alpha}{2k} - \frac{r \tan \alpha}{4k} \right) = -5mg^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$$

Количество теплоты $Q = -A$, откуда:

Ответ:

$$Q = 5mg^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{qB} \right)^2$$

D1^{0.40}

Определите модуль момента силы трения верчения M' . Ответ выразите через μ , m , g , α и r_0 .

Сила реакции N равномерно распределена по площади круга радиусом r_0 , поэтому:

$$\frac{dN}{dS} = \frac{mg \cos \alpha}{\pi r_0^2}$$

Тогда для момента силы трения имеем:

$$dM' = \frac{\mu dN}{dS} \cdot 2\pi r dr \cdot r \Rightarrow M' = \frac{\mu dN}{dS} \cdot \frac{2\pi r_0^3}{3}$$

откуда:

Ответ:

$$M' = \frac{2\mu mgr_0 \cos \alpha}{3}$$

D2^{0.50}

В какой момент времени t_1 шар начнёт вращаться? Ответ выразите через μ , r_0 , m , q , B , r и α .

Поскольку возникающий момент трения верчения направлен вдоль оси z - выражение для силы трения $\vec{F}$, и, как следствие, теорема о движении центра масс остаются верными:

$$a_{Cx} = \frac{5g \sin \alpha}{7} + \frac{qBr\omega_z}{7m}$$

В уравнение динамики вращательного движения необходимо внести изменения:

$$I\dot{\omega}_z = M_{\text{тр}} - \frac{qr^2B\omega_y}{5}$$

где $M_{\text{тр}}$ - возникающий момент силы трения верчения.

До тех пор, пока скорость центра шара не достигает значения

$$v_0 = \frac{2M'mr}{IqB} = \frac{10\mu mgr_0 \cos \alpha}{3qBr}$$

шар движется равноускоренно и не вращается.

Тогда выражение для времени t_1 следующее:

$$t_1 = \frac{7v_0}{5g \sin \alpha}$$

или же:

Ответ:

$$t_1 = \frac{14\mu mr_0}{3qBr \tan \alpha}$$

D3 1.50 Постройте качественный график $\omega_z(t)$. На графике укажите все характерные значения, особенности и асимптоты. Выразите характерные значения через m, g, α, q, B и r .

Для анализа последующего движения продифференцируем выражение для ускорения a_{Cx} :

$$\dot{a}_{Cx} = \ddot{v}_{Cx} = \frac{qBr\dot{\omega}_z}{7m} = \frac{qBr}{7m} \left(\frac{M'}{I} - \frac{qBv_x}{2mr} \right)$$

Вводя величину $v_1 = v_{Cx} - v_0$, получим:

$$\ddot{v}_1 = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \frac{v_1}{14} \Rightarrow v_1(t_1) = A \sin(\omega_0 \tau + \varphi_0)$$

где время $\tau = t - t_1$ - время, прошедшее от момента начала верчения. Воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} v_1(0) = A \sin \varphi_0 = 0 \\ \dot{v}_1(0) = \omega_0 A \cos \varphi_0 = \frac{5g \sin \alpha}{7} \Rightarrow v_{Cx}(\tau) = v_0 + \frac{5g \sin \alpha \sin \omega_0 \tau}{7\omega_0} \end{cases}$$

Подставляя в уравнение динамики вращательного движения относительно оси z :

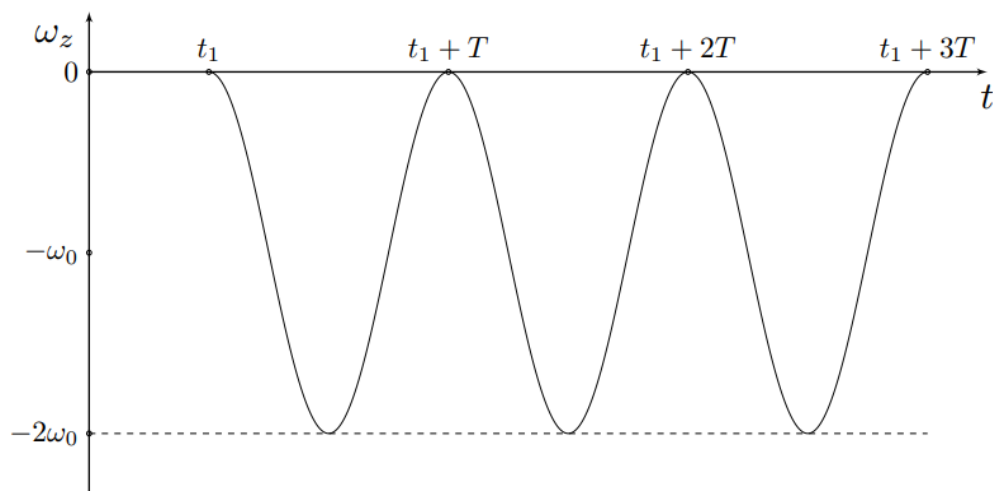
$$\dot{\omega}_z = -\frac{qB}{2mr} \cdot \frac{5g \sin \alpha \sin \omega_0 \tau}{7\omega_0} \Rightarrow \omega_z(\tau) = -\frac{qB}{2mr} \cdot \frac{5g \sin \alpha (1 - \cos \omega_0 \tau)}{7\omega_0^2}$$

В исходных терминах:

$$\omega_z(\tau) = -\frac{5mg \sin \alpha}{qBr} \left(1 - \cos \left(\frac{qB\tau}{m\sqrt{14}} \right) \right)$$

Из полученного выражения видно, что шар в моменты прекращения верчения вновь повторяет его по тому же закону, поскольку и скорость центра, и угловая скорость верчения изменяются с одинаковым периодом. Это можно интерпретировать как непрерывное верчение. Тогда график имеет вид, показанный на рисунке ниже:

Ответ:



D4 0.60 Постройте качественный график $x_C(t)$. На графике укажите все характерные значения, особенности и асимптоты. Характерные значения могут быть выражены через введенные вами переменные.

Мы уже упоминали, что до начала проскальзывания в течение времени t_1 шар движется равноускоренно и успевает пройти расстояние:

$$x_1 = \frac{7v_0^2}{10g \sin \alpha} = \frac{70\mu^2 m^2 g r_0^2 \cos^2 \alpha}{9q^2 B^2 r^2 \sin \alpha}$$

Определим зависимость $x(\tau)$:

$$x(\tau) = x_1 + \int_0^\tau \left(v_0 + \frac{5g \sin \alpha \sin \omega_0 \tau}{7\omega_0} \right) d\tau = x_1 + v_0 \tau + \frac{5g \sin \alpha (1 - \cos \omega_0 \tau)}{7\omega_0^2}$$

Изобразим это на графике:

Ответ:

