

A1 1.00 Запишите систему законов сохранения массы и импульса для объема газа, переходящего через волновой фронт ударной волны. Определите из неё скорость перемещения волнового фронта c .

Перейдем в систему отсчета, которая движется со скоростью волнового фронта ударной волны c . В этой СО газ с давлением p_0 и плотностью ρ_0 налетает на неподвижный фронт, а после фронта движется с некоторой скоростью u . Во всей задаче будем пользоваться этой системой отсчета.

За время dt через единицу площади потока проходит масса $\rho_0 c dt$, а выходит масса $\rho_1 u dt$, поэтому закон сохранения массы

$$\rho_0 c = \rho_1 u.$$

Импульс можно получить, домножив массу на соответствующую скорость. При этом импульс газа изменяется при прохождении волнового фронта за счет разности давлений на величину $(p_0 - p_1)dt$, поэтому

$$(\rho_1 u^2 - \rho_0 c^2)dt = (p_0 - p_1)dt,$$

и окончательно

$$p_0 + \rho_0 c^2 = p_1 + \rho_1 u^2.$$

Исключим скорость u с помощью закона сохранения массы:

$$u = c \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

и получим

$$p_0 + \rho_0 c^2 = p_1 + \frac{\rho_0^2}{\rho_1} c^2,$$

откуда скорость волны

$$c = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0}}.$$

Ответ:

$$\rho_0 c = \rho_1 u, \quad p_0 + \rho_0 c^2 = p_1 + \frac{\rho_0^2}{\rho_1} c^2, \quad c = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0}}.$$

A2 1.00 Запишите закон сохранения энергии для элемента объема газа, переходящего через волновой фронт. Получите из него дополнительное уравнение, связывающее параметры p_0 , ρ_0 , p_1 , ρ_1 , скорость перемещения волнового фронта c и показатель адиабаты γ .

Рассмотрим массу dm газа, пересекающую границу. Его кинетическая энергия изменяется на

$$\Delta E_k = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) dm,$$

внутренняя энергия на

$$\Delta U = C_V \frac{dm}{\mu} (T_1 - T_0) = C_V \frac{dm}{R} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Здесь C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, а температура выражена через давление с помощью уравнения состояния идеального газа.

Над газом совершена работа

$$A = p_0 \frac{dm}{\rho_0} - p_1 \frac{dm}{\rho_1}.$$

Поэтому закон сохранения энергии

$$A = \Delta E_k + \Delta U, \\ p_0 \frac{dm}{\rho_0} - p_1 \frac{dm}{\rho_1} = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) dm + C_V \frac{dm}{R} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Сократим на массу и перенесем все слагаемые, относящиеся к газу до прохождения волнового фронта в одну сторону:

$$\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{C_V}{R} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{c^2}{2} = \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{C_V}{R} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u^2}{2}.$$

Это соотношение – уравнение Бернулли, в котором внутренняя энергия газа выражена через давление и плотность.

Заметим, что

$$\frac{C_V}{R} + 1 = \frac{C_P}{R} = \frac{C_P}{C_P - C_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

а также подставим выражение для скорости u через скорость волнового фронта c и получим

Ответ:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{c^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} \frac{c^2}{2}$$

A3 ^{0.50} Комбинируя результаты, полученные в пунктах **A1** и **A2**, выразите отношение давлений p_1/p_0 через показатель адиабаты γ и коэффициент уплотнения $k = \rho_1/\rho_0$. Это соотношение называется уравнением адиабаты для ударной волны.

Подставим в соотношение из предыдущего пункта выражение для скорости волнового фронта:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} \right) \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

Упростим правую часть

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_0\rho_1} (p_1 - p_0),$$

сгруппируем слагаемые с p_0 и с p_1 :

$$p_1 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_0\rho_1} \right) = p_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_1 + \rho_0}{2\rho_0\rho_1} \right),$$

откуда требуемое отношение

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho_1 - \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1)}{\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho_0 - \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2\gamma k - (\gamma-1)(1+k)}{2\gamma - (\gamma-1)(1+k)}.$$

Ответ:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)k - (\gamma-1)}{\gamma+1 - (\gamma-1)k}.$$

A4 ^{0.50} Определите максимально возможное значение коэффициента уплотнения k_{max} . Ответ выразите через γ . Рассчитайте ответ для идеального двухатомного газа.

Из формулы для предыдущего пункта видим, что давление p_1 обращается в бесконечность при $k = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Это и есть максимальное значение k . Для двухатомного газа $\gamma = 7/5$, $k_{max} = 6$.

Ответ:

$$k_{max} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6.$$

B1 ^{0.60} Запишите закон сохранения энергии для детонационной волны. Получите из него уравнение, связывающее параметры p_0 , ρ_0 , p_1 , ρ_1 , скорость перемещения волнового фронта c , удельный тепловой эффект реакции q , а также показатели адиабаты γ_0 и γ_1 .

Закон сохранения энергии аналогичен пункту **B3**, но к работе сил давления нужно добавить выделившееся тепло qdm и учесть, что молярные теплоемкости исходного газа и продуктов реакции отличаются :

$$p_0 \frac{dm}{\rho_0} - p_1 \frac{dm}{\rho_1} + qdm = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) dm + C_{V1} \frac{dm}{R} \frac{p_1}{\rho_1} - C_{V0} \frac{dm}{R} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Выразим теплоемкости газов через показатели адиабаты, скорость газа u через скорость волнового фронта и перегруппируем слагаемые аналогично части А:

Ответ:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_0-1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{c^2}{2} + q = \frac{\gamma_1}{\gamma_1-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c^2}{2} \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}.$$

B2 ^{0.60} Явную зависимость $p_1(v_1)_{\text{дет}}$ для сильной детонационной волны можно представить в виде:

$$p_1 = \frac{q}{v_0} \cdot A$$

Определите A . Ответ выразите через γ_1 и отношение v_1/v_0 .
 Это соотношение называется уравнением детонационной адиабаты.

В приближении сильной волны скорость волнового фронта

$$c^2 = \frac{p_1}{\rho_1 - \rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0} = p_1 \frac{v_0^2}{v_0 - v_1}.$$

Подставим его в закон сохранения энергии, пренебрежем при этом слагаемым $\frac{p_0}{\rho_0}$:

$$q + p_1 \frac{v_0^2}{2(v_0 - v_1)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} p_1 v_1 + \frac{v_1^2}{v_0^2} p_1 \frac{v_0^2}{2(v_0 - v_1)}.$$

Отсюда

$$p_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} v_1 + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2(v_0 - v_1)} \right) = q,$$

$$p_1 = \frac{q}{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} v_1 - \frac{1}{2}(v_0 + v_1)} = \frac{q}{v_0} \frac{2}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1}$$

Ответ:

$$A = \frac{2}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1}.$$

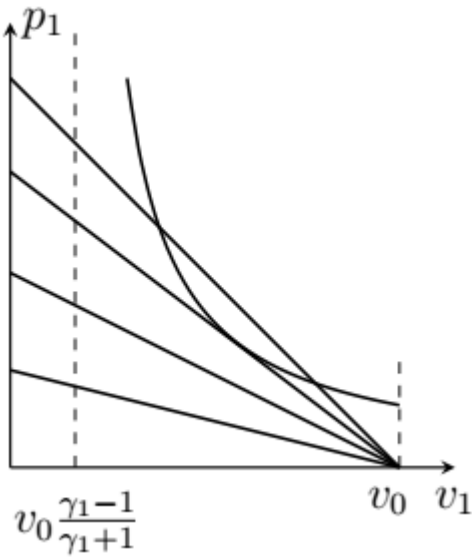
В3 0.60 На одном графике качественно изобразите зависимость $p_1(v_1)_{\text{дет}}$, а также зависимость $p_1(v_1)_{\text{имп}}$ при различных значениях скорости перемещения волнового фронта c .

График зависимости $p_1(v_1)_{\text{дет}}$ – гипербола, асимптота которой находится при $v_1 = v_0 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}$. Зависимость давления от удельного объема, выраженная через скорость звука, имеет вид

$$p_1(v_1)_{\text{имп}} = \frac{c^2}{v_0} \left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right),$$

ее график - линейная функция, обращаящаяся в 0 при $v_1 = v_0$.

Ответ:



В4 1.40 Определите параметры p_1 и v_1 точки Чепмена-Жуге. Выразите ответ через v_0 , γ_1 , q .

Приравняем выражения для давления через скорость волны и из уравнения ударной адиабаты.

$$\frac{c^2}{v_0} \left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right) = \frac{2q}{v_0} \frac{1}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1},$$

получим квадратное уравнение на отношение v_1/v_0 :

$$\left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right) \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1 \right) = \frac{2q}{c^2}.$$

Это уравнение будет иметь единственное решение, если правая часть равна максимальному значению квадратичной функции в левой части. Это максимальное значение достигается при

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1},$$

соответствующее значение равно

$$\frac{2q}{c^2} = \frac{1}{\gamma_1^2 - 1},$$

откуда скорость волны

$$c = \sqrt{2q(\gamma_1^2 - 1)}$$

и давление

$$p_1 = \frac{c^2}{v_0} \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) = \frac{2q(\gamma_1^2 - 1)}{v_0} \frac{1}{\gamma_1 + 1} = \frac{2q}{v_0}(\gamma_1 - 1).$$

Второе решение. Уравнение будет иметь единственное решение, если кривые зависимости $p_1(v_1)$ будут касаться друг друга. Приравняем выражения для давлений и их производных по v_1 :

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{v_0} \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) &= \frac{2q}{v_0} \frac{1}{\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1} \frac{v_1}{v_0} - 1}, \\ \frac{c^2}{v_0^2} &= \frac{2q}{v_0^2} \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1} \frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

Выразим скорость волны из второго уравнения и подставим в первое:

$$\begin{aligned} c^2 &= 2q \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1} \frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2}, \\ \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1 - \frac{v_1}{v_0}}{\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1} \frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2} &= \frac{1}{\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1} \frac{v_1}{v_0} - 1}, \end{aligned}$$

отсюда получаем уравнение на отношение v_1/v_0 :

$$\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1,$$

из которого находим

$$v_1 = v_0 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}.$$

Подставляя это значение в выражение для c^2 , получаем ответы для c и затем p_1 .

Ответ:

$$v_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} v_0, \quad p_1 = \frac{2q}{v_0}(\gamma_1 - 1).$$

B5
 0.20

Определите скорость перемещения волнового фронта c . Ответ выразите через q и γ_1 .

Ответ:

$$c = \sqrt{2q(\gamma_1^2 - 1)}.$$

B6
 0.60

Рассчитайте скорость перемещения волнового фронта при детонационной волне в смеси кислорода и водорода, если при его нагревании до высоких температур происходит следующая химическая реакция:



Реальный процесс горения водорода представляет собой совокупность реакций, в которых взаимодействуют атомы кислорода и водорода, поэтому в числе продуктов реакции нужно учитывать ионы H^+ и HO^- (этот ион можно считать двухатомной молекулой). В смеси на 2 моля водорода приходится моль кислорода в соответствии с уравнением реакции. Для этой реакции считайте, что $q \approx 15$ МДж/кг на каждый килограмм израсходованного водорода.

Продукты реакции представляют собой смесь одноатомного, двухатомного и многоатомного газов в равных пропорциях (по количеству вещества), поэтому показатель адиабаты (индексы 1,2,3 отмечают величины, относящиеся к одноатомному, двухатомному и многоатомному газу соответственно)

$$\gamma_1 = \frac{C_{P1} + C_{P2} + C_{P3}}{C_{V1} + C_{V2} + C_{V3}} = \frac{10}{7}.$$

Тогда скорость волны можно рассчитать по формуле из предыдущего пункта. При этом нужно учесть, что приведено количество тепла, приходящееся на единицу массы водорода. Согласно уравнению реакции, на 1 кг водорода приходится 8 кг кислорода, поэтому нужно использовать значение q в 9 раз меньше.

Ответ:

$$c = \sqrt{2q(\gamma_1^2 - 1)} \approx 1.86 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

C1^{1.20} Получите уравнение светодетонационной адиабаты, аналогичное пункту **B2**, то есть найдите давление p_1 в плазме после прохождения волнового фронта. Выразите ответ через v_0, v_1, γ_1, I_0 .

Запишем закон сохранения энергии из пункта **B2**, заменив в нем $q = I_0 v_0 / c$, выразив скорость волны c через давление и удельные объемы:

$$I_0 v_0 \frac{\sqrt{1 - v_1/v_0}}{\sqrt{p_1 v_0}} + p_1 \frac{v_0^2}{2(v_0 - v_1)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} p_1 v_1 + \frac{v_1^2}{v_0^2} p_1 \frac{v_0^2}{2(v_0 - v_1)}.$$

Преобразуем это уравнение

$$I_0 \frac{\sqrt{v_0 - v_1}}{\sqrt{p_1}} = \frac{p_1 v_0}{2} \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1 \right),$$

откуда получим

Ответ:

$$p_1 = \left(\frac{2I_0 \sqrt{v_0 - v_1}}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} v_1 - v_0} \right)^{2/3}.$$

C2^{1.40} Определите параметры (p_1 и v_1) точки Чемпена-Жуге для светодетонационной адиабаты. Ответ выразите через v_0, γ_1, I_0 .

Снова запишем равенство давлений, полученных из формулы для светодетонационной адиабаты и из скорости движения волны:

$$\left(\frac{2I_0 \sqrt{v_0 - v_1}}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} v_1 - v_0} \right)^{2/3} = \frac{c^2}{v_0} \left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right).$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right)^{2/3} \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} v_1 - v_0 \right)^{2/3} = \frac{(2I_0 v_0)^{2/3}}{c^2}.$$

Возводя уравнение в степень $3/2$, снова получим квадратное уравнение на v_1/v_0 :

$$\left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right) \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \frac{v_1}{v_0} - 1 \right) = \frac{2I_0 v_0}{c^3}.$$

Левая часть такая же, как и в случае ударной волны, поэтому максимум достигается при

$$v_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} v_0,$$

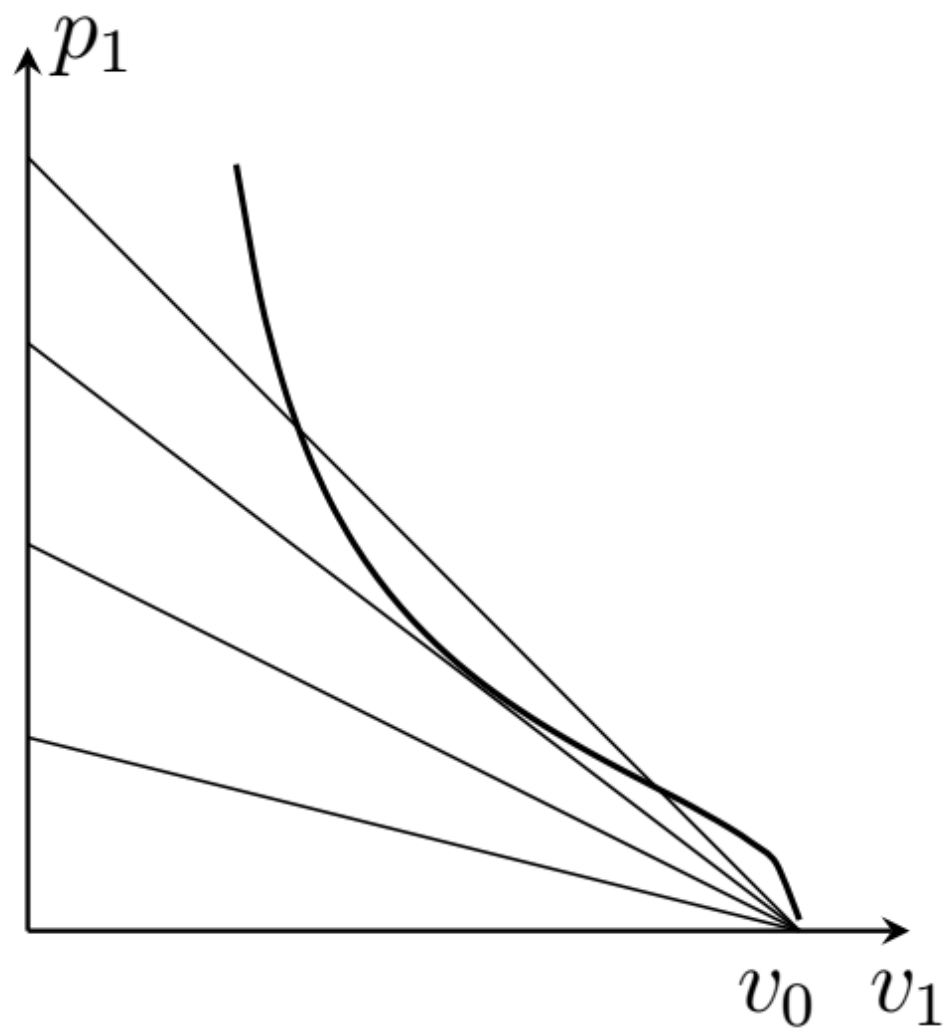
а скорость волны можно найти из соотношения

$$\frac{2I_0 v_0}{c^3} = \frac{1}{\gamma_1^2 - 1}, \quad c = (2I_0 v_0 (\gamma_1^2 - 1))^{1/3}.$$

Тогда давление

$$p_1 = \frac{(2I_0 v_0 (\gamma_1^2 - 1))^{2/3}}{v_0} \frac{1}{\gamma_1 + 1} = \left(\frac{4I_0^2}{v_0} \frac{(\gamma_1 - 1)^2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/3}.$$

Для сравнения также построим на одном графике светодетонационную адиабату и зависимости $p_1(v_1)$ при постоянной скорости звука.



Ответ:

$$v_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} v_0, \quad p_1 = \left(\frac{4I_0^2}{v_0} \frac{(\gamma_1 - 1)^2}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/3}.$$

СЗ 0.40 Определите скорость перемещения волнового фронта c светодетонационной волны. Выразите ответ через γ_1 , I_0 , ρ_0 . Рассчитайте ее численное значение.

Воспользуемся формулой для скорости волнового фронта из предыдущего пункта, подставим в нее значение интенсивности $I_0 = P/\pi r^2 \sim 10^{15} \text{ Вт/м}^2$, и значение $v_0 = 1/\rho_0$.

Ответ:

$$c = (2I_0 v_0 (\gamma_1^2 - 1))^{1/3} \approx 100 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$