

A1 0.30

Запишите уравнение, связывающее силу тока в кольце $I(t)$ и магнитное поле в сердечнике $B_z(t)$.

Запишем закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Для выбранного направления тока в кольце (против часовой стрелки при виде сверху) ЭДС индукции равна:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\pi d^2}{4} \dot{B}_z$$

Применим второе правило Кирхгофа к выбранному контуру и получим:

$$L\dot{I} + IR = -\frac{\pi d^2}{4} \dot{B}_z$$

A2 0.50

Получите зависимость силы вихревого тока $I(t)$ от времени при $B_z(t) = B_m \cos \omega t$.

Представим индукцию магнитного поля в комплексной форме:

$$B_z(t) = B_m e^{i\omega t}$$

Тогда:

$$I(i\omega L + R) = -\frac{\pi d^2 B_m}{4} \frac{de^{i\omega t}}{dt} = \frac{\pi d^2 \omega B_m e^{i(\omega t - \pi/2)}}{4}$$

Поскольку $R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{i \arctan(\omega L/R)}$, для $I(t)$ находим:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) = \frac{\pi d^2 \omega B_m}{4\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t - \pi/2 - \arctan(\omega L/R))} \right)$$

Отсюда:

Ответ:

$$I(t) = \frac{\pi d^2 \omega B_m}{4\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R} \right)$$

A3 0.30

Из теоремы Гаусса найдите радиальную компоненту поля $B_{0\rho}(z)$. Далее во всех пунктах используйте полученный результат.

Применим теорему Гаусса о потоке индукции магнитного поля к цилиндрической поверхности, соосной с осью z :

$$\frac{\partial \Phi_{\text{осн}}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{\text{бок}}}{\partial z} = 0$$

Поскольку зависимостью $B_z(\rho)$ внутри сердечника можно пренебречь, последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\pi d^2}{4} \frac{\partial B_{0z}(z)}{\partial z} + \pi d \cdot B_{0\rho}(z) = 0$$

Отсюда:

Ответ:

$$B_{0\rho} = -\frac{d}{4} \frac{\partial B_{0z}(z)}{\partial z}$$

A4 0.20

Найдите зависимость аксиальной компоненты силы $F_z(z, t)$, действующей на кольцо, от координаты z и времени t .

Определим проекцию силы Ампера на ось z :

$$F_z = -\pi d I B_\rho$$

Тогда имеем:

Ответ:

$$F_z = \frac{\pi^2 d^4 \omega B_{0z}(z)}{16\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{\partial B_{0z}(z)}{\partial z} \cdot \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi), \quad \phi = \arctg \frac{R}{L\omega}$$

A5^{0.60} Найдите $F_z(z)$.

Воспользуемся формулой для произведения косинусов:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \Rightarrow \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) = \frac{\cos(\phi) + \cos(2\omega t - \phi)}{2}$$

Усреднение по времени приводит к выражению:

$$\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) \rangle = \frac{\cos \phi}{2} = -\frac{\sin\left(\arctan \frac{\omega L}{R}\right)}{2} = -\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

откуда для усреднённой по времени силы находим:

Ответ:

$$F_z(z) = -\frac{\pi^2 d^4 B_{0z}(z)}{32} \frac{\partial B_{0z}(z)}{\partial z} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

B1^{0.50} Найдите выражение для $F_z(z)$ в рассматриваемой геометрии и потенциал этой силы $U_F(z)$ (считайте, что он равен нулю на вершине сердечника).

Для описанной в условии модели:

$$\frac{\partial B_{0z}(z)}{\partial z} = -\frac{B_0}{H} = \text{const}$$

Отсюда получим выражение для силы $F_z(z)$:

Ответ:

$$F_z(z) = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32H} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Для потенциала с учётом $U_F(H) = 0$ имеем:

$$U_F(z) = -\int_H^z F_z(z) dz = -\frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32H} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \int_H^z \left(1 - \frac{z}{H}\right) dz = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \int_0^{1-z/H} t dt$$

откуда:

Ответ:

$$U_F(z) = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{64} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2$$

B2^{0.50} На какой высоте h будет парить кольцо в состоянии равновесия, если поле «включить» медленно? Выразите ответ через $m, g, R, L, \omega, d, B_0, H$.

При медленном изменении силы тока в соленоиде кольцо будет всё время располагаться вблизи положения равновесия, поэтому высота его левитации определяется условием его равновесия:

$$F_z = mg$$

Подставляя выражение для $F_z(z)$ и учитывая, что в равновесии $z = h$, находим:

$$h = H \left(1 - \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L}\right)$$

Данный ответ применим, если величина в скобках положительна, иначе $h = 0$, поэтому окончательно:

Ответ:

$$h = \begin{cases} H \left(1 - \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \right) & \text{при } \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2} < 1 \\ 0 & \text{при } \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2} > 1 \end{cases}$$

В3 0.50

На какую высоту h_m подскочит кольцо, если поле «включить» быстро? Выразите ответ через $m, g, R, L, \omega, d, B_0, H$.

Получим зависимость равнодействующей сил Ампера и тяжести, действующих на кольцо, от его координаты z :

$$R_z = F_z - mg = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32H} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} - mg - \frac{\pi^2 d^4 B_0^2 z}{32H^2} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} = A - kz$$

Это линейная функция, положение которой соответствует значению $z_0 = h = A/k$, найденному в предыдущем пункте, причём если $A < 0$ – кольцо так же не подпрыгнет, т.е $h_m = 0$. Если в положении равновесия потенциальную энергию кольца в поле всех сил принять равной нулю – её зависимость от z имеет следующий вид:

$$U(z) = \frac{k(z - z_0)^2}{2}$$

Кольцо останавливается в точке, в которой его потенциальная энергия та же, что и в начальном положении, откуда:

$$z_{\text{ост}} = 2z_0 \Rightarrow h_m = 2h = 2H \left(1 - \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \right)$$

Полученный ответ применим только в том случае, если $h_m < H$. В противном случае необходимо учесть, что при $z > H$ индукция магнитного поля $B_z(z) = 0$, и, как следствие, $F_z = 0$.

Принимая за ноль потенциальную энергию в вершине сердечника, для начальной и конечной потенциальной энергии кольца получим:

$$U_0 = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{64} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} - mgH \quad U_k = mg(h_m - H)$$

Приравнявая, находим:

$$h_m = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{64mg} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Окончательный ответ запишется следующим образом:

Ответ:

$$h_m = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \geq 1 \\ 2H \left(1 - \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \leq 1 \\ \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{64mg} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} & \text{при } \frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

В4 0.80

Найдите, на какую высоту h_m в общем случае подскочит кольцо при быстром включении поля, если при медленном включении оно левитирует на высоте h .

Вычислите h_m , если $h = 18$ см; 8 см. Ответы приведите с двумя значащими цифрами.

Получим связь между h_m и h :

- При $h = 0$ величина h_m также равняется нулю.
- При $0 < h \leq H/2$ величина $h_m = 2h$.
- Пусть $h \geq h/2$. Тогда выражение для h_m можно получить из уравнения:

$$\frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2} = 1 - \frac{h}{H} = \frac{H}{2h} \Rightarrow h_m = \frac{H^2}{2(H - h)}$$

Окончательно зависимость $h_m(h)$ следующая:

Ответ: Окончательно зависимость $h_{\text{м}}(h)$ следующая:

$$h_{\text{м}} = \begin{cases} 2h & \text{при } 0 \geq h \leq \frac{H}{2} \\ \frac{H^2}{2(H-h)} & \text{при } h \geq \frac{H}{2} \end{cases}$$

Поскольку $H = 20$ см - $h = 18$ см $> H/2$, а $h_2 = 8$ см $< H/2$. Тогда из полученной связи $h_{\text{м}}$ и h находим:

Ответ:

$$h_{\text{м}}(h_1) = \frac{H^2}{2(H-h_1)} = 100 \text{ см} \quad h_{\text{м}}(h_2) = 2h_2 = 16 \text{ см}$$

C1 0.50

Найдите дополнительную среднюю силу Ампера $F_z(v_z, z)$, возникающую из-за движения кольца.

Дополнительное приращение производной $\Delta\dot{\Phi}$ связанное с движением кольца выразим как

$$\Delta\dot{\Phi} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\partial B}{\partial z} \dot{z}.$$

Это вызывает дополнительный ток

$$\Delta I = \frac{\pi d^2}{4R} \frac{\partial B}{\partial z} \dot{z}.$$

Дополнительная сила:

$$\Delta F = B_\rho \Delta I \pi d = -\frac{\pi^2 d^4}{16R} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)^2 \dot{z}.$$

Усредняя $\frac{\partial B}{\partial z}$ по времени, получаем выражение для силы.

Ответ:

$$F_z(v_z, z) = -\frac{\pi^2 d^4 B_0^2 v_z}{32RH^2}$$

C2 1.00

Найдите декремент затухания δ . Выразите ответ через $R, L, \omega, g, H, h_{\text{м}}$. Вычислите δ с двумя значащими цифрами.

Поскольку дополнительная сила прямо пропорциональна скорости, движение кольца будет представлять собой простые колебания затухающего осциллятора. Декремент затухания таких колебаний равен:

$$\delta = \pi \frac{2\gamma}{\omega_0}.$$

В терминах величин, данных в условии, можем записать:

$$2\gamma = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32mRH^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32mH^2} \cdot \frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Таким образом, декремент затухания:

$$\delta = \frac{\pi^2 d^2 B_0}{HR\omega} \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{32mL}}.$$

Учитывая, результаты предыдущей части, выразим ответ через требуемые величины:

$$\delta = \pi \frac{R^2 + L^2 \omega^2}{LR\omega^2} \sqrt{\frac{2g}{2H - h_{\text{м}}}} = 0.32$$

Ответ: *Примечание:* Как видите, на самом деле получилось $\delta \sim 1$, т.е. пренебрегать этим ЭДС, по-хорошему, нельзя. Однако это предельно усложнило бы вычисления, не изменив качественного результата.

D1 0.80

Найдите сопротивление R_n стопки из n контактирующих колец. Найдите удельную силу F_n/nmg , действующую на каждое из колец в стопке при $z = 0$. На какой высоте h_n при этом левитирует стопка? Кольца можно считать очень тонкими, поэтому индуктивность стопки колец равна индуктивности одного кольца. Ответы выразите через n, H, R, L, ω .

Поскольку сила тока в кольце такова, что оно только начинает отрываться от опоры:

$$\frac{32mgH(R^2 + \omega^2 L^2)}{\pi^2 d^4 B_0^2 \omega^2 L} = 1$$

Поскольку $R \sim S^{-1}$, а при контакте n колец общая площадь поперечного сечения увеличивается в n раз:

$$R_n = \frac{R}{n}$$

Тогда для силы $F_n(z)$ имеем:

$$F_n(z) = \frac{\pi^2 d^4 B_0^2}{32H} \cdot \frac{\omega^2 L}{(R/n)^2 + \omega^2 L^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Отсюда:

Ответ:

$$\frac{F_n}{nmg} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2/n + n\omega^2 L^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Выражение для h_n получается из уравнения:

$$\frac{F_n}{nmg} \left(1 - \frac{h_n}{H}\right) = 1$$

откуда:

Ответ:

$$h_n = H \left(1 - \frac{R^2/n + n\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

D2 0.50

При каком числе колец n_{opt} удельная сила будет наибольшей? Вычислите его для рассматриваемого в задаче кольца.

При любых значениях z удельная сила будет наибольшей при наименьшем значении знаменателя. Его минимально возможное значение определяется равенством:

$$\frac{R^2}{n} = n\omega^2 L^2 \Rightarrow n = \frac{R}{\omega L} \approx 3.18$$

Целое значение n , дающее наиболее близкий к минимальному значению знаменатель, равняется либо $\lceil R/(\omega L) \rceil$, либо $\lceil R/(\omega L) \rceil + 1$. Сравним эти два значения:

$$\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{\omega^2 L^2}{R^2} = 0.629 \quad \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{\omega^2 L^2}{R^2} = 0.645$$

Таким образом:

Ответ:

$$n_{\text{opt}} = \left\lceil \frac{R}{\omega L} \right\rceil = 3$$

D3 0.50

При каком максимальном числе колец n_{max} стопка колец ещё будет левитировать? Вычислите его для рассматриваемого в задаче кольца.

Условие возможной левитации можно записать следующим образом:

$$\frac{F_n}{nmg} \geq 1$$

Максимально возможной величине n соответствует $z = 0$, поэтому:

$$\frac{F_n(0)}{nmg} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2/n + n\omega^2 L^2} \geq 1 \Rightarrow n^2 - n \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \leq 0$$

Максимальное значение n определяется целой частью большего из корней:

$$n_{\text{max}} = \left\lfloor \frac{1 + R^2/(\omega^2 L^2) + |1 - R^2/(\omega^2 L^2)|}{2} \right\rfloor$$

Поскольку $R > \omega L$, окончательно имеем:

Ответ:

$$n_{max} = \left[\frac{R^2}{\omega^2 L^2} \right] = 10$$

E1^{0.70}

Найдите, как зависит средняя мощность $\overline{Ri^2}$ токов Фуко, возникающих в катушке, от координаты z . Ответ выразите через z, H, R, L, ω, g и h .

Для средней мощности имеем:

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle.$$

Выражение для $\langle I^2 \rangle$ получается усреднением квадрата косинуса:

$$\langle I^2 \rangle = \frac{\pi^2 d^4 \omega^2 B_z^2(z)}{32(R^2 + \omega^2 L^2)}.$$

Используя выражение для h из пункта В2, получим ответ:

Ответ:

$$\overline{Ri^2} = \frac{gH^2mR}{L(H-h)} \left(1 - \frac{z}{H} \right)^2$$

E2^{1.30}

Найдите **численно** полные Джоулевы потери Q в кольце за время его разгона. Приведите ответ с двумя значащими цифрами.

Сила, действующая на кольцо линейно зависит от z :

$$F(z) = F_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right).$$

Из условия $F(h) = mg$ получим $F_0 = 10mg$. Уравнение гармонических колебаний запишется в виде:

$$m\ddot{z} = F_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right) - mg = -\frac{F_0}{H}z + \text{const}.$$

Угловая частота гармонических колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{10 \frac{g}{H}} \approx 22.14 \text{ с}^{-1}.$$

Используя начальные условия, получаем зависимость $z(t)$:

$$z(t) = h(1 - \cos(\omega_0 t)).$$

Пусть кольцо вылетает с сердечника в момент времени t_0 . Тогда

$$\begin{aligned} z(t_0) &= h(1 - \cos(\omega_0 t_0)) = H; \\ t_0 &= \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{h}{H} - 1\right) \approx 75.5 \text{ мс}. \end{aligned}$$

Мощность потерь можно выразить в зависимости от времени, подставив $z(t)$:

$$P(t) = \frac{gH^2mR}{L(H-h)} \left(1 - \frac{h}{H}(1 - \cos(\omega_0 t)) \right)^2.$$

Отсюда получаем выражение для Q :

$$Q = \frac{gH^2mR}{L(H-h)} \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{h}{H}(1 - \cos(\omega_0 t)) \right)^2 dt \approx 22.1 \text{ Дж}$$

Ответ:

$$Q \approx 22 \text{ Дж}$$

E3^{0.30}

Найдите **численно** механическую энергию E , переданную кольцу за время его разгона. Приведите ответ с двумя значащими цифрами.

Воспользовавшись результатами, полученными при решении пункта В3 для случая $h > H/2$, получим:

$$E = mgh_m = \frac{mgH^2}{2(H - h)}.$$

Ответ:

$$E = \frac{mgH^2}{2(H - h)} \approx 0.29 \text{ Дж}$$

E4^{0.20}

Найдите **численно** КПД η Томсоновского индукционного ускорителя. Приведите ответ с двумя значащими цифрами.

Выражение для КПД:

$$\eta = \frac{E}{E + Q}.$$

Ответ:

$$\eta \approx 1.3\%$$