

A1^{0.20} Рассмотрим случай, когда лучи 1 и 2 параллельны оси z , а зеркало МЗ параллельно плоскости xy . Найдите разность оптических путей Δ_{12} между лучами 1 и 2, если они оба падают на экран в точке O .

На горизонтальных участках разность путей составляет $L_1 - L_2$, ещё первый луч дважды проходит расстояние L_3 . Таким образом, суммарная разность:

$$\Delta_{12} = L_1 + 2L_3 - L_2$$

Ответ:

$$\Delta_{12} = L_1 + 2L_3 - L_2$$

A2^{1.40} Рассмотрим случай, когда зеркало МЗ отклоняют на угол α от плоскости xy путём вращения вокруг оси x (см. рис. 1). Если луч 1' падает на экран в точке O , найдите разность оптических путей $\Delta_{1'2}$ между лучами 1' и 2. Покажите, что в первом приближении разность хода не зависит от α и упростите ваш ответ при $\alpha \ll 1$.

Заметим, что треугольник полученный из путей лучей 1 и 1' от зеркала МЗ до точки O равнобедренный. Ещё изменения горизонтального и вертикального путей из-за изменения точки падения луча компенсируют друг друга. Единственный параметр влияющий на путь, пройденный лучом 1, это координата z точки попадания на зеркало МЗ: она влияет на расстояние пройденное от НМ до МЗ. А оптический путь луча 2 никак не изменяется. Получаем:

$$\Delta_{1'2} = \Delta_{12} - (2(L_3 + L_4) \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \Delta_{12} - 2(L_3 + L_4) \sin^2 \alpha$$

Подставляя результат прошлого пункта:

$$\Delta_{12'} = L_1 + 2L_3 - L_2 - 2(L_3 + L_4) \sin^2 \alpha \approx L_1 + 2L_3 - L_2 - 2(L_3 + L_4) \alpha^2$$

Ответ:

$$\Delta_{1'2} = L_1 + 2L_3 - L_2 - (L_3 + L_4) \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = L_1 + 2L_3 - L_2 - 2(L_3 + L_4) \alpha^2$$

B1^{0.80} Пусть лучи 1 и 2 падают в фиксированные точки зеркал М1 и М2 соответственно. Покажите в листах решений, что в первом приближении оптические пути лучей 1 и 2 от точек отражения от зеркал М1 и М2 соответственно до экрана не зависят от углов θ и α .

B2^{0.80} Пусть углы α и θ зафиксированы, а положения точек падения лучей 1 и 2 на зеркала М1 и М2 соответственно могут изменяться. Покажите в листах решений, что оптические пути лучей 1 и 2 от пунктирной линии, соответствующей координате $z_{\pi} = L_3 + L_4$ (подразумеваются точки пересечения пунктирной линии с траекториями лучей 1 и 2 до падений на зеркала М1 и М2 соответственно), до экрана в первом приближении не зависят от углов θ и α .

B3^{1.00} Выразите b и δ_O через $\lambda, L_1, L_2, L_3, L_4$.

δ_O можно найти, используя прошлую часть задачи, так как это значение разности фаз для $\theta = 0$. Заметим, что разность фаз возникает не только из-за разности оптических путей, но и из-за отражений: луч 1 отражается на один раз больше, поэтому он дополнительно смещён на π .

$$\delta_O = \frac{2\pi}{\lambda}(L_1 + 2L_3 - L_2) + \pi$$

Можно заметить, что в силу утверждений, доказанных в B1 и B2 при изменении угла θ разность фаз возникает только из-за изменения путей до пересечения с пунктирной линией $z_{\pi} = L_3 + L_4$, то есть:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda}(L_1 + L_2)\theta &= \frac{2\pi}{\lambda}b\theta \\ b &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} b &= L_1 + L_2 \\ \delta_O &= \frac{2\pi}{\lambda}[L_1 + 2L_3 - L_2] + \pi \end{aligned}$$

B4^{0.60} Покажите в листах решений, что

$$\delta_y = \delta_O - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha y$$

Примечание: Далее во всех пунктах задачи можно пользоваться утверждениями пунктов **B1-B4**, даже если они не доказаны.

Рассмотрим два луча 1, которые приходят в точки на экране, расположенные на расстоянии y . В силу малости α расстояние между точками отражения этих лучей от МЗ тоже равно y . Заметим, что разность оптических путей между ними возникает только из-за из-за разных координат z точек отражения от МЗ: сокращается путь от НМ до МЗ и от МЗ до экрана.

$$\Delta L = -2y\alpha$$

$$\delta_y = \delta_O - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\alpha y$$

Ответ:

$$\delta_y = \frac{2\pi}{\lambda} [L_1 + 2L_3 - L_2 - 2\alpha y] + \pi$$

B5^{0.60} Таким образом, на экране возникнет интерференционная картина. Найдите расстояние y_1 до ближайшего к точке O интерференционного максимума. Найдите также расстояние Δy_m между двумя соседними интерференционными максимумами. Приведите численные ответы в случае $L_1 = 0.50$ м, $L_2 = 1.50$ м, $L_3 = 0.50$ м, $L_4 = 1.00$ м, $\alpha = 10^{-4}$, $\theta = 10^{-5}$, $\lambda = 500$ нм.

Подставляя численные значения, получаем:

$$\delta = 81\pi - 800 \frac{\pi}{1\text{м}} \cdot y$$

Максимум соответствует $\delta = 2\pi n$. В точке O находится минимум.

$$y_1 = \frac{\lambda}{4\alpha} = 1.25\text{мм}$$

$$\Delta y_m = \frac{\lambda}{2\alpha} = 2.5\text{мм}$$

Ответ:

$$y_1 = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$
$$\Delta y_m = \frac{\lambda}{2\alpha} = 2.5 \text{ мм}$$

B6^{0.90} Найдите, как интенсивность $I(y)$ на экране зависит от координаты y , если её максимальное значение равно I_0 , подставив сюда численные значения из предыдущего пункта. Учтите влияние светоделителя на интенсивность прошедшего света.

Амплитуда поля в луче 1 в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем во втором. Тогда интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды:

$$I \sim 1 + 2 + 2\sqrt{2} \cos \delta$$
$$I(y) = I_0 \frac{3 - 2\sqrt{2} \cos \left[80\pi \left(1 - 10 \frac{y}{1\text{м}} \right) \right]}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Ответ:

$$I(y) = I_0 \frac{3 - 2\sqrt{2} \cos \left[80\pi \left(1 - 10 \frac{y}{1\text{м}} \right) \right]}{3 + 2\sqrt{2}}$$

C1^{0.40} Выразите волновой вектор $\vec{k}$ падающих лучей через θ_x , θ_y , модуль волнового вектора $k = 2\pi/\lambda$ и единичные орты координатных осей.

В силу малости углов θ_x и θ_y :

$$k_z = -k$$

$$k_x = -k\theta_x$$

$$k_y = -k\theta_y$$

Ответ:

$$\vec{k} = -k(\theta_x \hat{x} + \theta_y \hat{y} + \hat{z})$$

C2 0.60

Выразите разность фаз между лучами 1" и 2" через $\lambda, L_1, L_2, L_3, L_4, \theta_x, \theta_y, \alpha, y$.

Заметим, что начальное смещение по оси x лучей, попадающих в одну точку на экране, величина порядка $L_3\theta_x$, разность оптических путей соответственно пропорциональна θ_x^2 , поэтому вклад θ_x можно не учитывать. Ответ аналогичен прошлой части задачи:

$$\delta_{1''2''} = \frac{2\pi}{\lambda} ((L_1 + L_2)\theta_y + (L_1 + 2L_3 - L_2) - 2\alpha y) + \pi$$

Ответ:

$$\delta_{1''2''} = \frac{2\pi}{\lambda} ((L_1 + L_2)\theta_y + (L_1 + 2L_3 - L_2) - 2\alpha y) + \pi$$

D1 1.80

Запишите V в виде интеграла по одной переменной. Явно производить интегрирование при этом необязательно.

Подсказка: интеграл некоторой функции $f(\theta_y)$, зависящей только от θ_y , по поверхности диска радиусом θ_R можно представить в виде:

$$I = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} d\theta_y \int_{-\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2}}^{\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2}} d\theta_x f(\theta_y) = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} d\theta_y \cdot 2\sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} f(\theta_y).$$

Части звезды излучают независимо, поэтому интенсивности от них можно складывать.

$$dI = J d\theta_x d\theta_y \left(3 - 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + 2L_3 - L_2 - 2\alpha y) + \frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_y \right) \right)$$

Обозначим $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + 2L_3 - L_2)$.

$$I = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} J \sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} \left(3 - 2\sqrt{2} \cos \left(-\frac{4\pi}{\lambda} \alpha y + \frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_y + \varphi_0 \right) \right) d\theta_y$$

Заметим, что:

$$I_{max} = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} J \sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} \left(3 + 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_y \right) \right) d\theta_y$$

$$I_{min} = \int_{-\theta_R}^{\theta_R} J \sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} \left(3 - 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_y \right) \right) d\theta_y$$

Тогда видность:

$$V = \frac{2\sqrt{2} \int_{-\theta_R}^{\theta_R} \sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_y \right) d\theta_y}{3 \int_{-\theta_R}^{\theta_R} \sqrt{\theta_R^2 - \theta_y^2} d\theta_y}$$

Обозначим $\omega = \frac{\theta_y}{\theta_R}$.

$$V = \frac{2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \omega^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_R \omega \right) d\omega}{3 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \omega^2} d\omega}$$

Интеграл в знаменателе равен площади половины окружности единичного радиуса, то есть $\frac{\pi}{2}$. Обозначим $\eta = \frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2 + d)\theta_R$.

$$V = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \int_{-1}^1 d\omega \sqrt{1 - \omega^2} \cos(\eta\omega)$$

Заметим, что интегрируемая функция чётная, поэтому:

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \int_0^1 dw \sqrt{1-w^2} \cos(\eta w)$$

Ответ:

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \int_0^1 dw \sqrt{1-w^2} \cos(\eta w)$$

D2 0.90 Найдите угловой радиус Бетельгейзе θ_R . Найдите её радиус R , если расстояние до неё $h = 6.079 \cdot 10^{15}$ км.

Подсказка: Первые два нуля интеграла

$$F_n = \int_0^1 (1-w^2)^n \cos(\eta w) \, dw$$

как функции η приведены в таблице ниже.

Первые обнуления видности соответствуют η_1 и η_2 для $n = 0.5$. Таким образом:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)\theta_R$$

$$\theta_R = \frac{(\eta_2 - \eta_1)\lambda}{2\pi(d_2 - d_1)} = 1.18 \cdot 10^{-7}$$

$$R = \theta_R h = 7.16 \cdot 10^8 \text{ км}$$

Ответ:

$$\theta_R = \frac{(\eta_2 - \eta_1)\lambda}{2\pi(d_2 - d_1)} = 1.18 \cdot 10^{-7}$$

$$R = \theta_R h = 7.16 \cdot 10^8 \text{ км}$$