

A1^{0.20} Запишите уравнение на временную производную $\dot{\tau}$ температуры термистора. Выразите ваш ответ через напряжение U_R на термисторе, ёмкость конденсатора C и введённые выше коэффициенты c и κ . Перепишите это же уравнение в терминах U_R , c , κ и сопротивления термистора $R(\tau)$.

Мощность, выделяемая на резисторе, можно записать как:

$$P = \frac{U_R^2}{R} = U_R I = U_R \dot{Q}_C = \frac{1}{C} U_R \dot{U}_C = \frac{1}{C} U_R \frac{d}{dt} [U - U_R] = -\frac{1}{C} U_R \dot{U}_R = -\frac{1}{2C} \frac{d}{dt} [U_R^2].$$

При этом мощность, рассеиваемая резистором в окружающее пространство, равна $\kappa\tau$, откуда:

Ответ:

$$c\dot{\tau} = -\frac{C}{2} \frac{d}{dt} [U_R^2] - \kappa\tau$$
$$c\dot{\tau} = \frac{U_R^2}{R} - \kappa\tau$$

A2^{0.60} Пусть $c = a_1 U^2$, а $\kappa = a_2 U^2$. По асимптотикам кривой $\tau(t)$ при малых и больших t найдите значения коэффициентов a_1 и a_2 .

Введём обозначения $c = a_1 U^2$ и $\kappa = a_2 U^2$. Для поиска a_1 проведём касательную к графику $\tau(t)$ в точке $t = 0$. Её угловой коэффициент будет равен $\frac{U^2}{cR_0} = \frac{1}{a_1 R_0}$. Для поиска a_2 снимем несколько точек с "хвоста" графика и перестроим их в координатах $\ln \tau(t)$. Угловой коэффициент полученной прямой будет равен $-\frac{\kappa}{c} = -\frac{a_2}{a_1}$. Окончательный ответ:

Ответ:

$$c = a_1 U^2, \quad a_1 = 8.26 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{В}^2}$$
$$\kappa = a_2 U^2, \quad a_2 = 6.82 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{В}^2}$$

A3^{0.60} Выразите через κ и τ количество теплоты, которое выделится на термисторе за всё время, и свяжите его с изменением энергии конденсатора W_C . Найдите отсюда ёмкость конденсатора C и её численное значение.

Тепло, которое рассеется на термисторе, равно интегралу мощности теплообмена от $t = 0$ до $t = +\infty$:

$$Q_R = \kappa \int_0^{+\infty} \tau(\xi) d\xi.$$

Работа источника за это время $A = QU = CU^2$, а изменение энергии конденсатора $W_C = \frac{C}{2} U^2 \implies$ на термисторе выделится $Q_R = A - W_C = \frac{C}{2} U^2 \implies$

Ответ:

$$Q_R = \kappa \int_0^{+\infty} \tau(\xi) d\xi = \frac{C}{2} U^2$$

Подставляя выражение для κ из **A2**, имеем:

Ответ:

$$C = 2a_2 \int_0^{+\infty} \tau(\xi) d\xi = 47 \text{ мФ}$$

A4^{0.20} Запишите выражение для мощности P , выделяющейся на термисторе. Выразите ответ через U , R_0 , τ и введённые в **A2** численные коэффициенты.

Из пунктов **A1** и **A2** получаем:

$$P = \frac{U_R^2}{R} = c\dot{\tau} + \kappa\tau = [a_1\dot{\tau} + a_2\tau] U^2.$$

Ответ: $P = [a_1 \dot{\tau} + a_2 \tau] U^2$

A5 ^{0.20} Найдите отсюда выражение для напряжения U_R на резисторе. Выразите ответ через U , τ и введённые в **A2** численные коэффициенты.

Вспомним, что мощность на термисторе равна $P = \frac{C}{2} \frac{d}{dt} [U_R^2]$, откуда в результате интегрирования получаем:

$$\int_0^t P(\xi) \, d\xi = \frac{C}{2} [U^2 - U_R^2(t)] = c\tau(t) + \kappa \int_0^{+\infty} \tau(\xi) \, d\xi \implies U_R = \sqrt{U^2 - \frac{2}{C} \left[c\tau + \kappa \int_0^t \tau(\xi) \, d\xi \right]}.$$

Подставляя выражение для κ из **A2**, имеем:

Ответ:

$$U_R = U \sqrt{\frac{-a_1 \tau + a_2 \int_t^{+\infty} \tau(\xi) \, d\xi}{a_2 \int_0^{+\infty} \tau(\xi) \, d\xi}}$$

A6 ^{0.20} Получите выражение для сопротивления термистора R . Выразите ответ через R_0 , τ и введённые в **A2** численные коэффициенты.

Подставляя результаты **A4** и **A5** в выражение $P = \frac{U_R^2}{R}$, имеем:

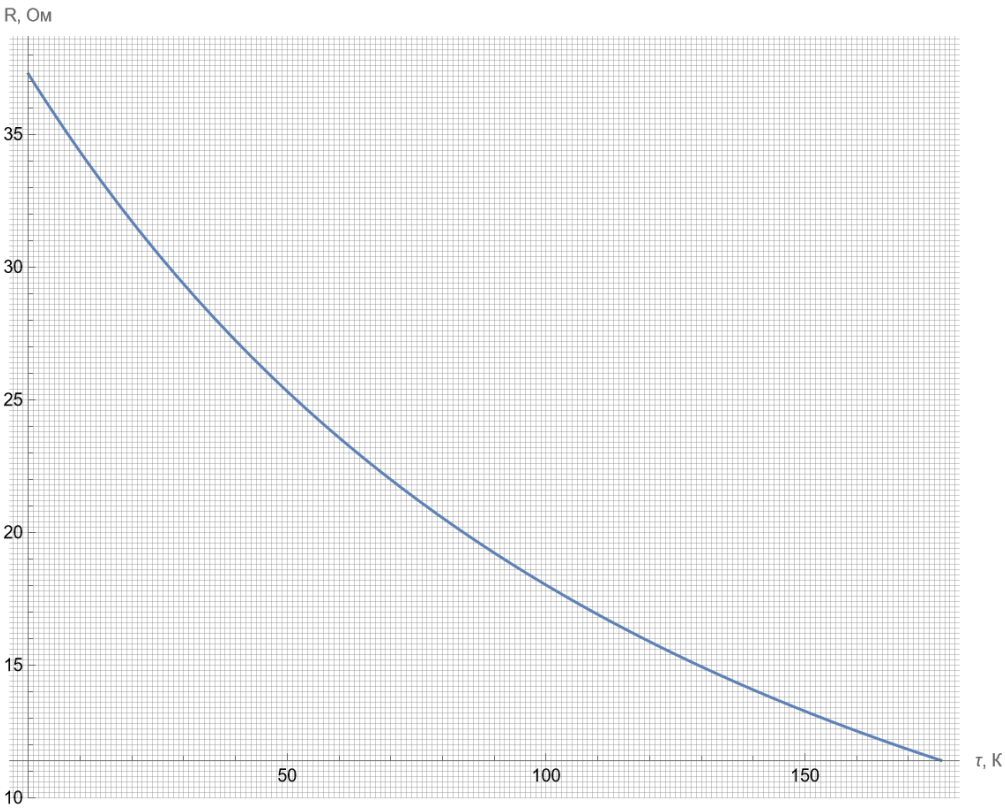
Ответ:

$$R(t) = \frac{1}{a_1 \dot{\tau} + a_2 \tau} \frac{-a_1 \tau + a_2 \int_t^{+\infty} \tau(\xi) \, d\xi}{a_2 \int_0^{+\infty} \tau(\xi) \, d\xi}$$

A7 ^{2.00} Как можно точнее найдите по графику зависимость $R(\tau)$.

Оригинальный график в максимальном разрешении можно найти в материалах к задаче.

Ответ:



A8 ^{0.20} Найдите c и κ , если полное приложенное напряжение равно $U = 220$ В.

Подставляем в выражения из **A2**:

Ответ:

$$c = 4.0 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

$$\kappa = 3.3 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}$$

В1 0.60

Рассматривая значения $\frac{1}{T_0 + \tau_i}$ как экспериментальные точки, а правую часть уравнения Стейнхарта–Харта как уравнение модельной кривой, запишите систему уравнений, позволяющую найти коэффициенты A , B и C .

По МНК нам нужно минимизировать следующую сумму:

$$\mathcal{S} = \sum_i \left[A + B \ln R + C \ln^3 R - \frac{1}{T_0 + \tau} \right]^2.$$

Для этого необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial B} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

Беря производные и переписывая уравнения через средние по выборке, получим:

$$\text{Ответ: } \begin{cases} A + \overline{\ln R} \cdot B + \overline{\ln^3 R} \cdot C = \overline{[T_0 + \tau]^{-1}} \\ \overline{\ln R} \cdot A + \overline{\ln^2 R} \cdot B + \overline{\ln^4 R} \cdot C = \overline{[T_0 + \tau]^{-1} \ln R} \\ \overline{\ln^3 R} \cdot A + \overline{\ln^4 R} \cdot B + \overline{\ln^6 R} \cdot C = \overline{[T_0 + \tau]^{-1} \ln^3 R} \end{cases}$$

В2 1.40

Решите эту систему **численно** и получите коэффициенты Стейнхарта–Харта.

Выбор желаемого алгоритма решения оставим за читателем.

Ответ:

$$A = 9.3 \cdot 10^{-4}$$

$$B = 3.3 \cdot 10^{-4}$$

$$C = 2.6 \cdot 10^{-5}$$

С0 ??

Внимание! Если вы не решали части **А** и **В** или не хотите использовать полученные значения коэффициентов уравнения Стейнхарта–Харта и контактную теплопроводность терморезистора, можете воспользоваться следующими значениями:

$$A = 7.3 \cdot 10^{-4} \quad B = 1.30 \cdot 10^{-4} \quad C = 5.7 \cdot 10^{-6} \quad \kappa = 0.37 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}$$

В случае выбора приведённых значений явно напишите об этом в листе ответов для этого пункта. В этом случае ваш максимальный балл за пункты **С2** и **С4** будет на 10% меньше.

С1 0.20

Запишите уравнение для нахождения стационарного значения сопротивления NTC-термистора, к которому приложено постоянное напряжение U .

В стационарном режиме $\dot{\tau} = 0$, поэтому:

$$\frac{U^2}{R} = \kappa \tau = \kappa(T - T_0).$$

Исключая отсюда T с помощью уравнения Стейнхарта–Харта, имеем:

$$\text{Ответ: } \left[\frac{U^2}{\kappa} \frac{1}{R} + T_0 \right] \left[A + B \ln R + C \ln^3 R \right] = 1$$

С2 1.50

Решая это уравнение, получите как можно точнее зависимость $R(U)$. Постройте на основе полученных точек ВАХ терморезистора при небольших токах и напряжениях.

С помощью итеративных уравнений:

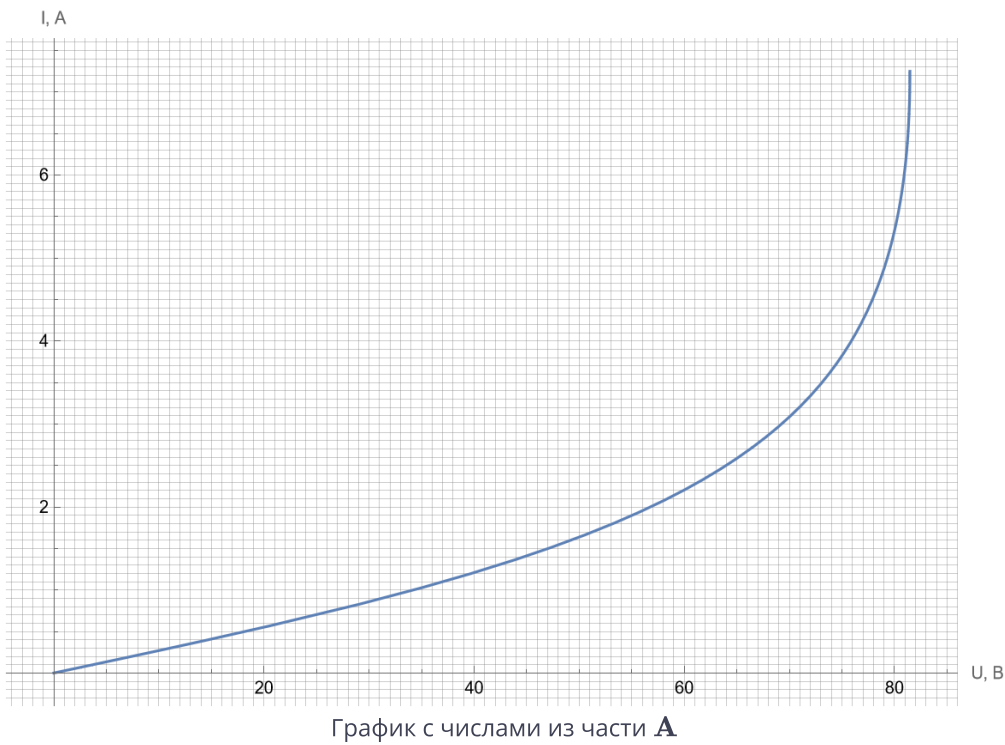
Нужно преобразовать уравнение к форме с R в левой части так, чтобы обеспечить сходимость.

Параметризацией по R :

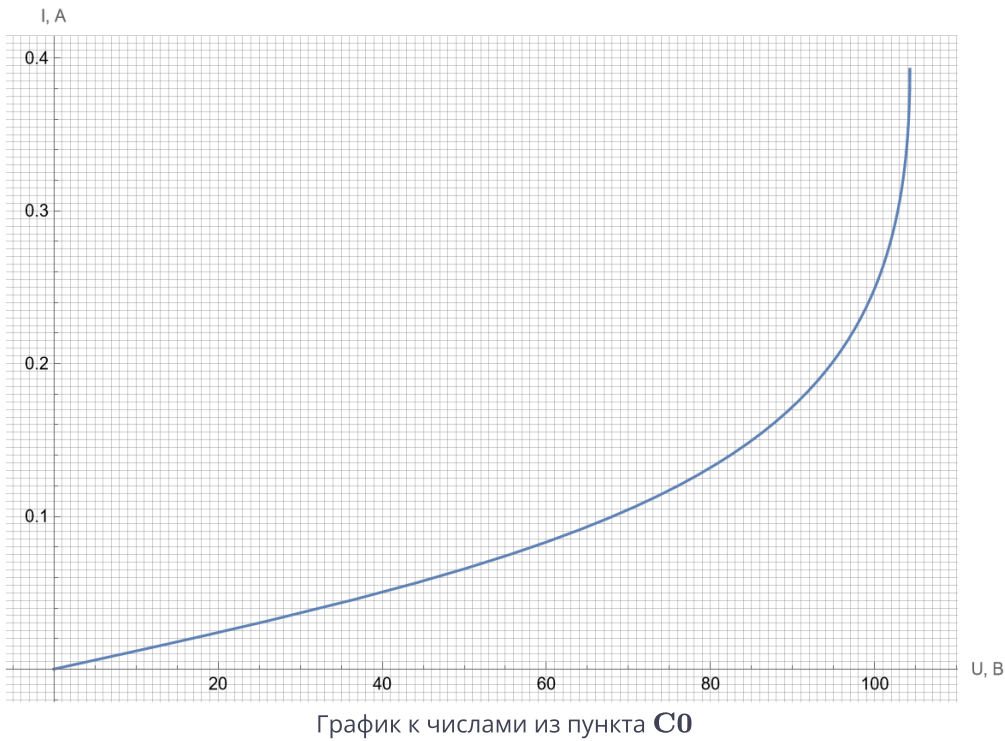
Куда проще можно поступить, если заметить, найти зависимость $U(R)$ очень легко. Вычислив пары точек, мы получим зависимость $R(U)$.

Оригинальные графики в максимальном разрешении можно найти в материалах к задаче.

Ответ:



Ответ:



СЗ 0.30

Найдите, при каком критическом напряжении U_{cr} и токе I_{cr} режим работы терморезистора меняется.

С помощью итеративных уравнений:

При увеличении напряжения можно заметить, что сходимость при решении итеративным методом происходит всё медленнее и медленнее, пока по достижении некоторого напряжения сопротивление не "улетает" скачком в область очень малых значений (которые, как несложно проверить, соответствуют температурам порядка $\sim 10^6$ К). Это – пробой термистора. Напряжение и ток, при котором он происходит:

Параметризацией по R :

При уменьшении R при некотором значении $R_{cr} = 11.241$ (256.5) Ом ВАХ "разворачивается", что, как известно, соответствует неустойчивому участку, а потому – пробой термистора. Отсюда сразу находим напряжение и ток, при котором он происходит:

Ответ:

$$U_{cr} = 81.47 \text{ (104.28) В}$$

$$I_{cr} = 7.248 \text{ (0.3928) А}$$

С4 1.50

Как можно точнее найдите зависимость $R(U)$ на участке ВАХ от найденной в предыдущем пункте критической точки до точки плавления терморезистора и постройте её на графике.

С помощью итеративных уравнений:

Нужно преобразовать уравнение к форме с R в левой части так, чтобы обеспечить сходимость. Температуру, которой соответствует конкретная точка на ВАХ, можно найти из уравнения Стейнхарта–Харта. При $T = T_{\max}$ ВАХ обрывается.

Параметризацией по R :

Сопротивление термистора $R_{\min}$ находим из уравнения Стейнхарта–Харта. Строим ВАХ от этого значения до найденного в предыдущем пункте.

Оригинальные графики в максимальном разрешении можно найти в материалах к задаче.

Ответ:

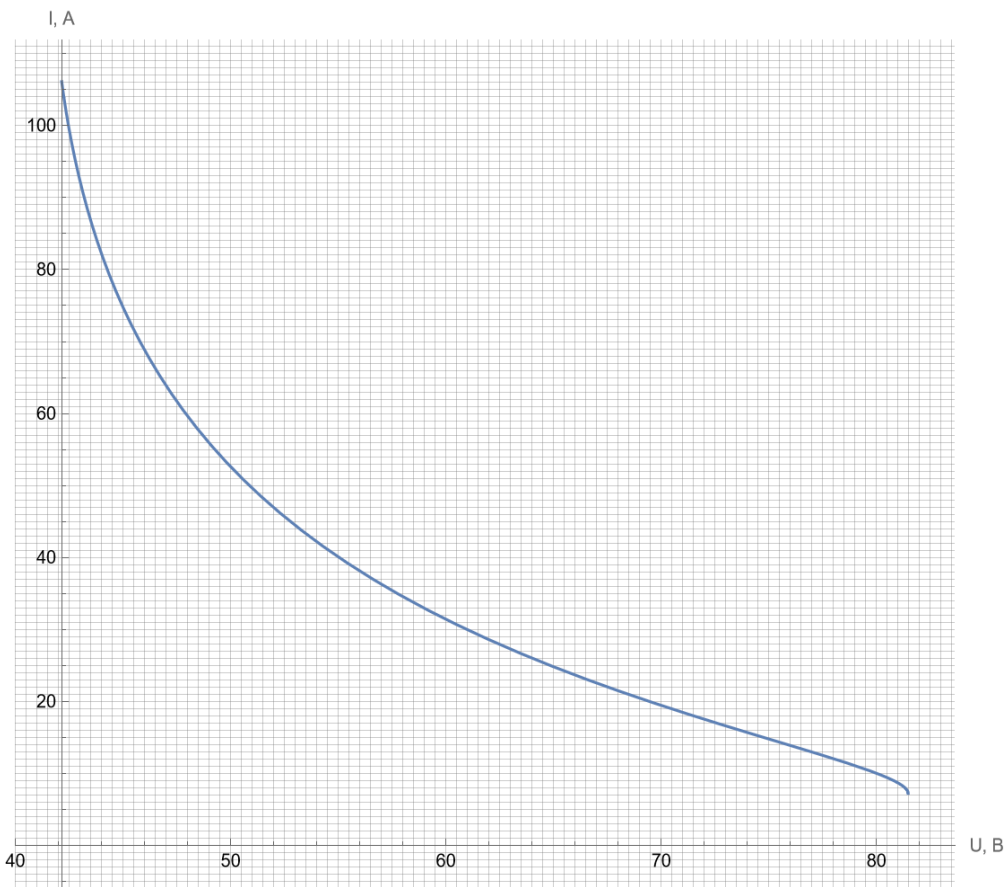


График с числами из части **A**

Ответ:

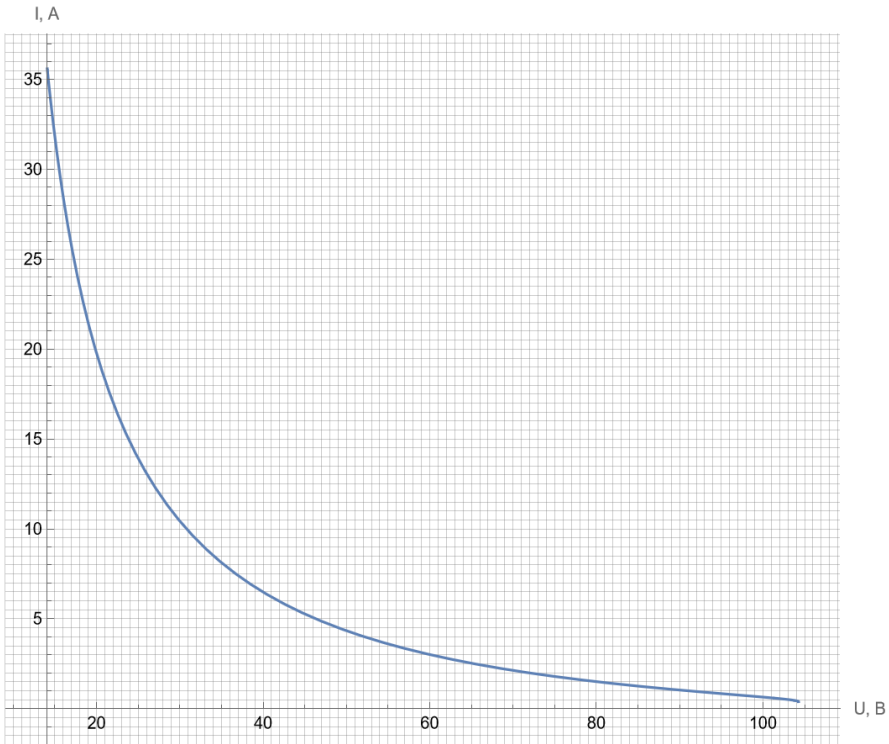


График к числами из пункта **C0**

C5

0.30

Найдите координаты (U_m, I_m) точки плавления терморезистора на ВАХ.

С помощью итеративных уравнений:

Температуру, которой соответствует конкретная точка на ВАХ, можно найти из уравнения Стейнхарта–Харта.

Параметризацией по τ :

Ответ получается непосредственной подстановкой в уравнение.

Ответ:

$$U_m = 42.14 \text{ (14.086) В}$$

$$I_m = 106.09 \text{ (35.59) А}$$