

A1 ^{1.50} Определите скорость v и ускорение a левого конца верёвки в момент, когда левый конец опускается на величину x . Ответ выразите через g, L_1, L, α и x .

Первое решение: Длина свисающей справа части верёвки равна $L_2 = L_1 + L \sin \alpha$, а полная длина верёвки составляет:

$$l = 2L_1 + L(1 + \sin \alpha).$$

Воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = -\Delta W_p,$$

где $m = \lambda l$ – масса верёвки, а ΔW_p – изменение её потенциальной энергии в поле тяжести.

Изменение потенциальной энергии верёвки в поле тяжести равно изменению потенциальной энергии участка верёвки длиной x , координата x_C центра масс которого изменилась от значения $x_{C_1} = -x/2$ до $x_{C_2} = x/2$. Отсюда имеем:

$$\Delta W_p = -\lambda x \cdot g \cdot (x_{C_2} - x_{C_1}) = -\lambda g x^2.$$

Подставляя ΔW_p в закон сохранения механической энергии, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\lambda v^2}{2} = \lambda g x^2 \Rightarrow v = x \sqrt{\frac{2g}{l}},$$

откуда:

Ответ:

$$v = x \sqrt{\frac{2g}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)}}.$$

Поскольку скорость $v(x)$ и перемещение x связаны прямой пропорциональностью:

$$a = v \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{2gx}{l},$$

откуда:

Ответ:

$$a = \frac{2gx}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)}.$$

Второе решение: Запишем уравнение движения каждого из участков верёвки:

$$\lambda(L_1 + x)a = \lambda(L_1 + x)g - T_1 \quad \lambda La = T_1 - T_2 + \lambda g L \sin \alpha \quad \lambda(L_2 - x)a = T_2 - \lambda(L_2 - x)g,$$

где T_1 и T_2 – силы натяжения верёвки вблизи блоков 1 и 2 соответственно.

Складывая уравнения, получим:

$$\lambda(L_1 + L_2 + L)a = \lambda g(L_1 + L \sin \alpha - L_2 + 2x),$$

откуда

Ответ:

$$a = \frac{2gx}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)}.$$

Домножая выражение для ускорения на скорость, получим:

$$av = \frac{d(v^2/2)}{dt} = \frac{2gxv}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} = \frac{g}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} \frac{d(x^2)}{dt}$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gx^2}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)},$$

откуда:

Ответ:

$$v = x \sqrt{\frac{2g}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)}}$$

A2 0.80

Определите величину смещения левого конца верёвки x_1 в тот момент времени, когда натяжение участка веревки, лежащего на наклонной плоскости, постоянно по длине этого участка. Ответ выразите через L_1 , L и α . При каких соотношениях L_1 , L и α величина x_1 меньше начальной длины правого участка верёвки?

Введём ось y , направленную вдоль наклонной плоскости от блока 1 к блоку 2. Запишем в проекции на ось y второй закон Ньютона для участка верёвки длиной dy , лежащего на наклонной плоскости:

$$dT + \lambda g \sin \alpha dy = \lambda a dy.$$

Величина $dT = 0$ при $a(x_1) = g \sin \alpha$. Отсюда:

$$\frac{2gx_1}{l} = g \sin \alpha \Rightarrow x_1 = \frac{l \sin \alpha}{2},$$

откуда:

Ответ:

$$x_1 = L_1 \sin \alpha + \frac{L \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{2}.$$

Сравним величину x_1 с величиной L_2 :

$$x_1 = L_1 \sin \alpha + \frac{L \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{2} \quad L_2 = L_1 + L \sin \alpha.$$

Коэффициенты перед L_1 и L в выражении для L_2 больше соответствующих коэффициентов в выражении для x_1 , поэтому:

Ответ: При любых соотношениях L_1 , L и α .

A3 1.50

Определите максимальную силу натяжения верёвки в момент времени, когда ее левый конец сместился на расстояние x . Ответ выразите через λ , g , L_1 , L , α и x .

На вертикальных участках верёвки наибольшая сила натяжения достигается в точках касания блоков, поскольку ускорение $a(x)$ всегда меньше g . Обозначим за T_1 и T_2 силу натяжения верёвки в точках касания блоков 1 и 2 соответственно.

Из второго закона Ньютона для левого вертикального участка верёвки получим:

$$\lambda(L_1 + x)g - T_1 = \lambda(L_1 + x)a \quad T_2 - \lambda(L_2 - x)g = \lambda(L_2 - x)a,$$

откуда:

$$T_1 = \lambda(L_1 + x)(g - a) \quad T_2 = \lambda(L_2 - x)(g + a).$$

Проанализируем наклонный участок верёвки. Из решения пункта A2 следует:

$$\frac{dT}{dy} = \lambda(a - g \sin \alpha).$$

При $x \leq x_1$ величина dT/dy не положительна, а при $x \geq x_1$ – неотрицательна, откуда следует, что:

$$T_{max} = \begin{cases} T_1 & \text{при } x \geq x_1 \\ T_2 & \text{при } x \leq x_1 \end{cases}$$

Подставляя выражения для a , L_2 и x_1 , получим:

Ответ:

$$T_{max} = \begin{cases} \frac{\lambda g(L_1 + x)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha) - 2x)}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} & \text{при } x \geq L_1 \sin \alpha + \frac{L \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{2} \\ \frac{\lambda g(L_1 + L \sin \alpha - x)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha) + 2x)}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} & \text{при } x \leq L_1 \sin \alpha + \frac{L \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{2} \end{cases}$$

A4 2.50

Определите величины смещения $x_{max(1)}$ и $x_{max(2)}$ левого конца верёвки, при котором она начинает терять контакт с блоками 1 и 2 соответственно, считая, что с другим блоком при этом контакт сохраняется. Ответы выразите через L_1 , L и α .

Запишем для участка верёвки массой $dm = \lambda dl$ второй закон Ньютона:

$$dm\vec{a} = d\vec{T} + dm\vec{g} + d\vec{N}.$$

При отрыве $d\vec{N} = 0$, поэтому:

$$dm\vec{a} = d\vec{T} + dm\vec{g}.$$

Пусть ρ – радиус кривизны рассматриваемой поверхности, тогда $dl = \rho d\varphi$, где $d\varphi$ – угол поворота касательной к верёвке на рассматриваемом участке dl . Спроецируем уравнение движения на направление нормали, направленное к центру кривизны:

$$dma_n = \lambda \rho d\varphi \cdot \frac{v^2}{\rho} = \lambda v^2 d\varphi = T d\varphi + \lambda \rho d\varphi \cdot g_n.$$

где g_n – проекция ускорения свободного падения на направление нормали.

Поскольку радиус блоков мал – условие отрыва следующее:

$$T = \lambda v^2.$$

Временно переобозначим величины $x_{max(1)}$ и $x_{max(2)}$ за x_1 и x_2 соответственно.

Уравнение для x_1 следующее:

$$\frac{\lambda g(L_1 + x_1)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha) - 2x_1)}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} = \frac{2\lambda g x_1^2}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)}.$$

откуда:

$$4x_1^2 - x_1 L(1 + \sin \alpha) - L_1(2L_1 + L(1 + \sin \alpha)) = 0.$$

У данного квадратного уравнения один положительный корень, поэтому:

Ответ:

$$x_{max(1)} = \frac{L(1 + \sin \alpha)}{8} + \sqrt{\left(\frac{L(1 + \sin \alpha)}{8}\right)^2 + \frac{L_1(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))}{4}}.$$

Уравнение для x_2 следующее:

$$\frac{\lambda g(L_1 + L \sin \alpha - x_2)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha) + 2x_2)}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)} = \frac{2\lambda g x_2^2}{2L_1 + L(1 + \sin \alpha)},$$

откуда:

$$4x_2^2 + x_2 L(1 - \sin \alpha) - (L_1 + L \sin \alpha)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha)) = 0.$$

У данного квадратного уравнения один положительный корень, поэтому:

Ответ:

$$x_{max(2)} = -\frac{L(1 - \sin \alpha)}{8} + \sqrt{\left(\frac{L(1 - \sin \alpha)}{8}\right)^2 + \frac{(L_1 + L \sin \alpha)(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))}{4}}.$$

A5^{1.20}

Рассчитайте скорость верёвки в момент её отрыва от одного из блоков, если наклонная плоскость образует с горизонтом углы $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 = 60^\circ$.

Для каждого из углов отрыв достигается при x , равном меньшей из соответствующих данному углу величин $x_{max(1)}$ и $x_{max(2)}$. Рассчитаем их:

$\alpha, ^\circ$	$x_{max(1)}, \text{м}$	$x_{max(2)}, \text{м}$
30	0.777	0.731
45	0.833	0.868
60	0.876	0.973

Таким образом, при угле α_1 верёвка впервые теряет контакт со вторым блоком, а при углах α_2 и α_3 – с первым.

Отсюда находим:

Ответ:

$$v_1 = 2.068 \text{ м/с} \quad v_2 = 2.264 \text{ м/с} \quad v_3 = 2.314 \text{ м/с}.$$

B1 ^{0.80} Определите величину смещения x_0 левого конца верёвки, соответствующую положению равновесия системы. Ответ выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k$ и F_0 .

Запишем условия равновесия для трёх участков верёвки:

$$T_1 = \lambda g(L_1 + x_0) + mg \quad T_2 - T_1 = \lambda g L \sin \alpha \quad T_2 = \lambda g(L_2 - x_0) + F_{\text{упр}},$$

откуда:

$$F_{\text{упр}} = \lambda g(L \sin \alpha + L_1 + x_0 + x_0 - L_1 - L \sin \alpha) + mg = mg + 2\lambda g x_0.$$

Поскольку $F_{\text{упр}} = F_0 + kx_0$, получим:

Ответ:

$$x_0 = \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g}.$$

B2 ^{0.70} Положение равновесия из предыдущего пункта существует, если жесткость пружины превышает некоторое минимальное значение $k_{\min}$. Определите $k_{\min}$. Ответ выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k$ и F_0 . Далее везде считайте, что $k > k_{\min}$.

Знаменатель полученного в пункте B1 должен быть положительным, поэтому имеем ограничение:

$$k > 2\lambda g.$$

Величина x_0 также ограничена длиной L_2 правого вертикального участка верёвки, поэтому:

$$x_0 = \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g} \leq L_1 + L \sin \alpha \Rightarrow k \geq 2\lambda g + \frac{mg - F_0}{L_1 + L \sin \alpha}.$$

Последнее ограничение является более существенным, поэтому имеем:

Ответ:

$$k_{\min} = 2\lambda g + \frac{mg - F_0}{L_1 + L \sin \alpha}.$$

B3 ^{0.80} Найдите изменение потенциальной энергии системы ΔW_p при смещении левого конца верёвки на величину x . Ответ выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k, F_0$ и x .

Для величин $\Delta W_{p(\text{г})}$ и $\Delta W_{p(\text{в})}$ имеем:

$$\Delta W_{p(\text{г})} = -mgx \quad \Delta W_{p(\text{г})} = -\lambda g x^2.$$

Изменение потенциальной энергии деформации пружины $\Delta W_{p(\text{деф})}$ равно площади под графиком $F_{\text{упр}}(\Delta l)$ и составляет:

$$\Delta W_{p(\text{деф})} = F_0 x + \frac{kx^2}{2}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$\Delta W_p = \frac{(k - 2\lambda g)x^2}{2} - (mg - F_0)x.$$

B4 ^{0.70} Если принять потенциальную энергию W_p в положении равновесия равной нулю, то ее можно представить в виде

$$W_p = \frac{A(x - B)^2}{2}.$$

Определите A и B . Ответы выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k$ и F_0 .

Из выражения для ΔW_p имеем:

$$W_p = \frac{(k - 2\lambda g)x^2}{2} - (mg - F_0)x + C = \frac{k - 2\lambda g}{2} \left(x - \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g} \right)^2 - \frac{(mg - F_0)^2}{2(k - 2\lambda g)} + C.$$

Определяя потенциальную энергию в положении равновесия равной нулю:

$$W_p = \frac{k - 2\lambda g}{2} \left(x - \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g} \right)^2.$$

Таким образом:

Ответ:

$$A = k - 2\lambda g \quad B = \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g}.$$

B5^{0.50} Определите максимальную скорость груза v_{max} и его смещение от начального положения x_{max} , если систему отпустить без начальной скорости. Ответы выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k$ и F_0 .

Максимальная скорость груза достигается в точке с координатой x_0 и определяется из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{(m + \lambda(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))v_{max}^2}{2} = \frac{Ax_0^2}{2},$$

откуда:

Ответ:

$$v_{max} = \frac{mg - F_0}{k - 2\lambda g} \sqrt{\frac{k - 2\lambda g}{m + \lambda(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))}}.$$

Величина x_{max} достигается в момент остановки груза, т.е определяется из условия:

$$\frac{A(x_{max} - x_0)^2}{2} = \frac{Ax_0^2}{2} \Rightarrow x_{max} = 2x_0,$$

откуда:

Ответ:

$$x_{max} = \frac{2(mg - F_0)}{k - 2\lambda g}.$$

B6^{1.00} Какую минимальную скорость v_{min} должен иметь груз в начальном положении, чтобы правый конец нити достиг уровня блока 2? Ответ выразите через $m, \lambda, L_1, L, \alpha, g, k$ и F_0 .

Груз должен остановиться в момент, когда опускается на величину L_2 . Из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{A(L_2 - x_0)^2}{2} = \frac{Ax_0^2}{2} + \frac{(m + \lambda(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))v_{min}^2}{2},$$

откуда:

Ответ:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{k - 2\lambda g}{m + \lambda(2L_1 + L(1 + \sin \alpha))} (L_1 + L \sin \alpha) \left(L_1 + L \sin \alpha - \frac{2(mg - F_0)}{k - 2\lambda g} \right)}$$