

A1^{1.50} Поскольку без участка цепи между узлами A и B электрическая цепь состоит целиком из источников постоянного напряжения и резисторов – зависимость силы тока I_{AB} , текущего от узла A к узлу B , от напряжения $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ на данном участке цепи можно представить в виде, не зависящем от элемента, включенного между узлами A и B :

$$I_{AB} = \frac{\mathcal{E}_0 - U_{AB}}{r_0}.$$

Определите $\mathcal{E}_0$ и r_0 . Ответы выразите через $\mathcal{E}$ и R .

Если между узлами A и B подключить идеальный вольтметр, напряжение на нем

$$U_V = \mathcal{E} \left(\frac{6R}{6R + 4R} - \frac{2R}{2R + 8R} \right) = \frac{2}{5} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0.$$

Если напряжение на источнике равно нулю, его можно заменить на провод с нулевым сопротивлением. Тогда схема между выводами A и B будет представлять собой две пары параллельно соединенных резисторов, $(2R, 8R)$ и $(6R, 4R)$, соединенных последовательно, а значит сопротивление

$$r_0 = R_{AB} = \frac{2R \cdot 8R}{2R + 8R} + \frac{6R \cdot 4R}{6R + 4R} = 4R.$$

Тогда зависимость напряжения от силы тока будет иметь вид

$$U_{AB} = \mathcal{E}_0 - I_{AB} r_0,$$

откуда

$$I_{AB} = \frac{\mathcal{E}_0 - U_{AB}}{r_0}.$$

Альтернативно можно вычислить ток короткого замыкания $I_c = \mathcal{E}_0 / r_0$, который будет течь через идеальный амперметр, подключенный между выводами A и B . При таком подключении общее сопротивление цепи, к которой подключен источник $\mathcal{E}$, равно

$$r_1 = \frac{2R \cdot 6R}{2R + 6R} + \frac{8R \cdot 4R}{8R + 4R} = \frac{25}{6} R.$$

Тогда полный ток через источник $\mathcal{E}$ $I_{\mathcal{E}} = 6\mathcal{E}/25R$, а токи через резисторы $2R$ и $8R$ будут равны соответственно:

$$I_1 = \frac{3}{4} I_{\mathcal{E}} = \frac{9\mathcal{E}}{50R}, \quad I_2 = \frac{1}{3} I_{\mathcal{E}} = \frac{2\mathcal{E}}{25R}.$$

Тогда ток короткого замыкания

$$I_c = I_{AB} = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{10R}.$$

Отсюда получаем прежнее значение сопротивления

$$r_0 = \mathcal{E}_0 / I_c = 4R.$$

Ответ:

$$r_0 = 4R, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{2}{5} \mathcal{E}$$

A2^{0.50} Получите зависимость силы тока I_{AB} от величины $\mathcal{E}$. Ответ выразите через $\mathcal{E}$, R , U_0 и I_0 .

Предположим, что напряжение на нелинейном элементе меньше U_0 , тогда это напряжение можно найти из уравнения

$$(r_0 + R)I_{AB} = \mathcal{E}_0 - U_{AB}, \quad (r_0 + R)I_0 \frac{U_{AB}}{U_0} = \mathcal{E}_0 - U_{AB},$$

откуда

$$U_{AB} = \frac{\mathcal{E}_0 U_0}{U_0 + (r_0 + R)I_0}, \quad \mathcal{E}_0 \leq U_0 + (r_0 + R)I_0.$$

Соответствующее значение тока

$$I_{AB} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{U_0 + 5RI_0}, \quad \mathcal{E}_0 \leq U_0 + 5RI_0.$$

При дальнейшем увеличении напряжения источника напряжение на нелинейном элементе станет больше U_0 , а ток через него будет равен I_0 . Напряжение на нелинейном элементе $U_{AB} = \mathcal{E}_0 - I_0 r_0$. Подставляя выражения для $\mathcal{E}_0$ и r_0 , получим ответ.

Ответ:

$$I_{AB} = \begin{cases} \frac{2\mathcal{E}I_0}{5(U_0 + 5RI_0)}, & \mathcal{E} \leq \frac{5}{2}(U_0 + 5RI_0); \\ I_0, & \mathcal{E} > \frac{5}{2}(U_0 + 5RI_0). \end{cases}$$

A3 0.50

Получите зависимость мощности $P_{\text{н.э.}}$, выделяемой на нелинейном элементе, от величины $\mathcal{E}$. Ответ выразите через $\mathcal{E}$, R , U_0 и I_0 .

Мощность на нелинейном элементе $P_{\text{н.э.}} = U_{\text{н.э.}} I_{AB}$. Используя результаты предыдущего пункта, получим ответ.

Ответ:

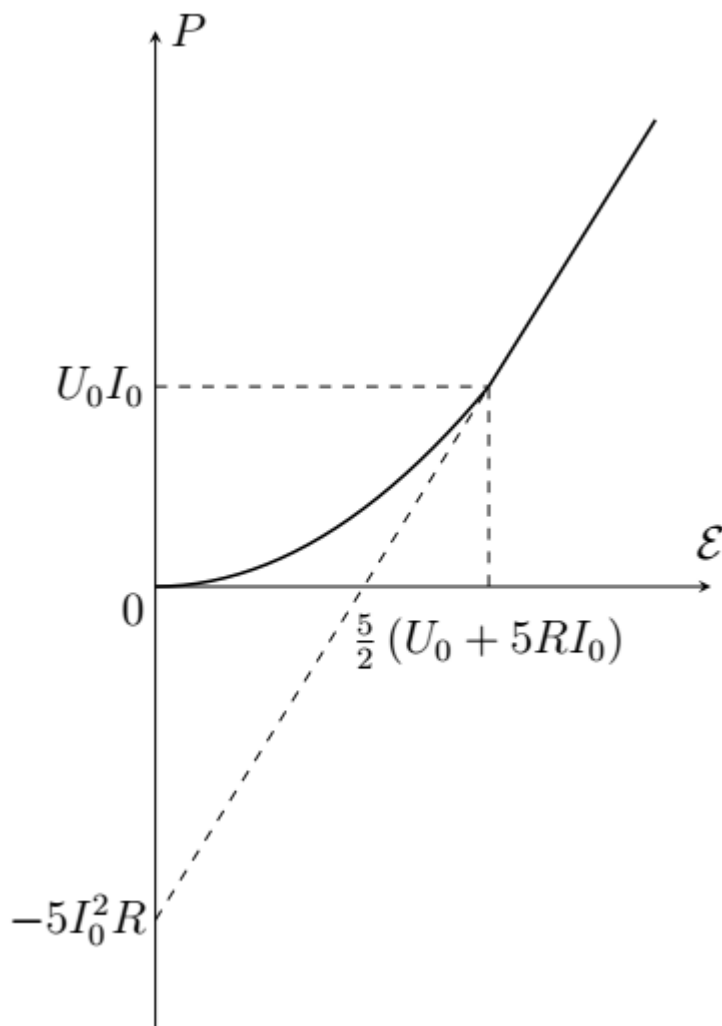
$$P_{\text{н.э.}} = \begin{cases} U_0 I_0 \frac{4\mathcal{E}^2}{25(U_0 + 5RI_0)^2}, & \mathcal{E} \leq \frac{5}{2}(U_0 + 5RI_0); \\ I_0 \left(\frac{2}{5}\mathcal{E} - 5I_0R \right), & \mathcal{E} > \frac{5}{2}(U_0 + 5RI_0). \end{cases}$$

A4 0.50

Постройте качественный график зависимости $P_{\text{н.э.}}(\mathcal{E})$. Укажите на графике все характерные точки и укажите соответствующие им значения.

При малых напряжениях график – парабола с вершиной в начале координат, при $\mathcal{E} \leq \frac{5}{2}(U_0 + 4RI_0)$ – прямая. В точке, в которой происходит переход от квадратичной зависимости к линейной $\mathcal{E} = U_0 + 4RI_0$, $P_{\text{н.э.}} = I_0 U_0$.

Ответ:



B1 0.80

Получите зависимость силы тока $I_C(t)$ через конденсатор от времени t . Ответ выразите через $\mathcal{E}$, R , U_0 , I_0 , C и t .

Если напряжение на нелинейном элементе меньше U_0 , он ведет себя как резистор с сопротивлением $r_0 = U_0/I_0 = 500 \text{ Ом} = R$. Поэтому в этом случае напряжение на нелинейном элементе должно быть равно напряжению на резисторе. Тогда начальное напряжение на нелинейном элементе равно $\mathcal{E}/2 = 3 \text{ В} < U_0$, поэтому мы везде можем пользоваться линейной зависимостью тока от напряжения. Тогда заряд конденсатора и ток через него связаны соотношением (которое получается из уравнения Кирхгофа)

$$I(R + r_0) + qC = \mathcal{E}.$$

Продифференцировав его по времени и учитывая, что $\dot{q} = I$, получим

$$\dot{I} = -\frac{I}{C(R + r_0)}, \quad I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{C(R+r_0)}}.$$

В начальный момент времени конденсатор не заряжен, поэтому $I(0) = \mathcal{E}/(R + r_0)$. Тогда ток через конденсатор

Ответ:

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{R + U_0/I_0} e^{-\frac{t}{C(R+U_0/I_0)}}$$

B2 0.60 Какое количество теплоты $Q_{\text{н.э}}$ выделится на нелинейном элементе за время установления постоянного тока? Ответ выразите через $\mathcal{E}$, R , U_0 , I_0 и C . Найдите численное значение.

При зарядке конденсатора через источник проходит заряд $q = C\mathcal{E}$, и он совершает работу $A_{\text{ист}} = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Эта работа идет на увеличение энергии конденсатора и на выделившееся тепло:

$$A_{\text{ист}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + Q,$$

поэтому в цепи выделяется тепло $Q = C\mathcal{E}^2/2$. Оно делится между резистором и нелинейным элементом пропорционально их сопротивлениям (поскольку при рассматриваемых напряжениях нелинейный элемент ведет себя как резистор)

$$Q_{\text{н.э.}} = \frac{r_0}{r_0 + R} \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{U_0}{U_0 + RI_0} \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 0.9 \text{ мДж}$$

B3 0.60 Через какое время τ количество теплоты, выделившееся на нелинейном элементе, достигнет 80% от величины $Q_{\text{н.э}}$? Ответ выразите через R , U_0 , I_0 , и C . Найдите численное значение.

Мощность на нелинейном элементе в зависимости от времени имеет вид

$$P = I_C^2 U_0 / I_0 = A e^{-2t/t_0}, \quad A = \frac{\mathcal{E}^2 U_0 I_0}{(RI_0 + U_0)^2}, \quad t_0 = C(R + U_0/I_0).$$

Тогда за время t на нелинейном элементе выделяется тепло

$$Q(t) = \int_0^t P(t) dt = A \frac{t_0}{2} (1 - e^{-2t/t_0}) = Q_{\text{н.э.}} (1 - e^{-2t/t_0}).$$

В момент времени, когда $Q = 0.8Q_{\text{н.э.}}$, $e^{-2t/t_0} = 0.2$,

Ответ:

$$t = \frac{\ln 5}{2} t_0 = \frac{\ln 5}{2} C \left(R + \frac{U_0}{I_0} \right) = 0.0804 \text{ с}$$

B4 1.50 Получите зависимость силы тока $I_C(t)$ через конденсатор от времени t . Ответ выразите через $\mathcal{E}$, R , U_0 , I_0 , C и t .

Теперь начальное напряжение на нелинейном элементе больше U_0 , а значит ток через нелинейный элемент (равный току через конденсатор), равен $I_C = I_0$. Этот ток будет оставаться постоянным, пока напряжение на конденсаторе не упадет до значения U_0 . До этого момента заряд конденсатора зависит от времени как $q = I_0 t$, а значит напряжение на нелинейном элементе

$$U_{\text{н.э.}} = \mathcal{E} - RI_0 - I_0 t / C.$$

Эта зависимость справедлива, пока $U_{\text{н.э.}} \geq U_0$, то есть

$$t \leq t_1 = \frac{C}{I_0} (\mathcal{E} - U_0 - RI_0).$$

Далее ток будет экспоненциально затухать, как при обычной зарядке конденсатора:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t - t_1}{C(R + U_0/I_0)}\right).$$

Ответ:

$$I_C = \begin{cases} I_0, & t \leq \frac{C}{I_0} (\mathcal{E} - U_0 - RI_0); \\ I_0 \exp\left(-\frac{t - C(\mathcal{E} - U_0 - RI_0)/I_0}{C(R + U_0/I_0)}\right), & t > \frac{C}{I_0} (\mathcal{E} - U_0 - RI_0). \end{cases}$$

B5 1.50 Какое количество теплоты $Q_{\text{н.э}}$ выделится на нелинейном элементе за время установления постоянного тока? Найдите численные значения с точностью не меньше 1%.

Пока ток остается постоянным, мощность на нелинейном элементе

$$P = I_0 U_{\text{н.э.}} = I_0 (\mathcal{E} - RI_0 - I_0 t / C).$$

Тогда за время t_1 выделится тепло

$$Q_1 = \int_0^{t_1} dt I_0 (\mathcal{E} - RI_0 - I_0 t / C) = I_0 (\mathcal{E} - RI_0) t_1 - I_0^2 t_1^2 / 2C,$$

$$Q_1 = C(\mathcal{E} - RI_0)(\mathcal{E} - U_0 - RI_0) - C(\mathcal{E} - U_0 - RI_0)^2/2 = \frac{C}{2}((\mathcal{E} - I_0R)^2 - U_0^2) = 1.2 \text{ мДж}$$

Далее зависимость мощности от времени имеет вид ($t' = t - t_1$)

$$P = \frac{U_0}{I_0} I_0^2 e^{-2t'/t_0}, \quad t_0 = C(R + U_0/I_0)$$

а значит полное выделившееся тепло

$$Q_2 = \int_0^\infty dt' U_0 I_0 e^{-2t'/t_0} = \frac{1}{2} U_0 I_0 t_0 = \frac{1}{2} U_0 I_0 C(R + U_0/I_0) = 2.5 \text{ мДж}$$

Ответ:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{C}{2}((\mathcal{E} - I_0R)^2 - U_0^2) + \frac{C}{2} U_0 (U_0 + I_0R) = \frac{C}{2}((\mathcal{E} - I_0R)^2 + U_0 I_0 R) = 3.7 \text{ мДж}$$