

Road to IPhO

Проводники в магнитном поле

Если проводник находится в переменном магнитном поле, либо движется в неоднородном магнитном поле — в нём возникает электрический ток. Возникновение электрического тока в проводниках является следствием явления электромагнитной индукции и достаточно хорошо изучено. В частности, эффект возникновения электрического тока в проводниках приводит к эффекту так называемого «магнитного торможения», который многим из вас наверняка приходилось наблюдать вживую. В данной задаче изучаются колебания проводящих тел с учётом влияния магнитного поля. Мы изучим два предельных перехода, соответствующие проводящим телам:

1. Удельное сопротивление ρ проводника настолько велико, что явлением самоиндукции можно пренебречь при определении токов Фуко, возникающих в проводнике. Данному предельному переходу посвящены части *A*, *B* и *C* данной задачи.
2. Удельное сопротивление ρ проводника настолько мало, что его можно принять равным нулю, а силовые линии индукции магнитного поля можно считать «вмороженными» в проводящее тело. Данному предельному переходу посвящена часть *D* данной задачи, в описании которой эффект вмороженности силовых линий индукции магнитного поля в проводник будет описан детально.

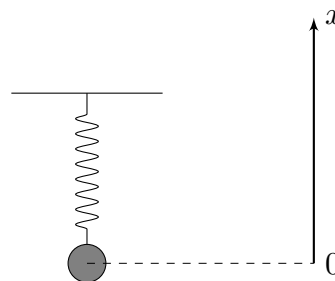
Часть А. Свободные колебания с затуханием (1.2 балла)

Рассмотрим вертикальный пружинный маятник, состоящий из невесомой пружины с коэффициентом жёсткости k , один конец которой закреплён, а к другому концу прикреплён груз массой m . При движении со скоростью $\vec{v}$ на него действует сила сопротивления $\vec{F}_c = -\beta\vec{v}$, где β — известная постоянная величина.

Введём ось x , направленную вдоль пружины так, что при увеличении координаты x груза длина пружины уменьшается, а в положении равновесия координата груза $x_0 = 0$. Во всех пунктах частей *A–C* шар перемещается только по вертикали.

Также введём обозначения:

$$\gamma = \frac{\beta}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \gamma < \omega_0.$$



A1 Пусть момент времени $t_0 = 0$ груз находится в начале координат, а проекция его скорости на ось x равна v_0 . Определите зависимости координаты $x(t)$ и скорости $v_x(t)$ груза от времени t . Ответ выразите через v_0 , γ , ω_0 и t . **0.6**

Пусть E_0 — кинетическая энергия груза при прохождении начала координат, а E_1 — кинетическая энергия груза при последующем прохождении начала координат с тем же направлением скорости. Определим добротность Q колебательной системы следующим образом:

$$Q = \frac{2\pi E_0}{E_0 - E_1}.$$

A2 Получите точное выражение для Q . Ответ выразите через ω_0 и γ . **0.4**

A3 Получите приближённое выражение для добротности Q при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответ выразите через m , k и β . **0.2**

Road to IPhO

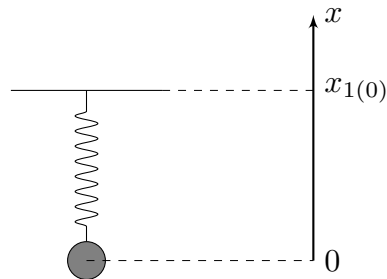
Часть В. Вынужденные колебания (1.2 балла)

Рассмотрим пружинный маятник из части А задачи. Координата x_1 второго конца пружины (к которому не прикреплен груза) изменяется по следующему закону:

$$x_1(t) = x_{1(0)} + A_0 \sin \Omega t,$$

где $A_0 > 0$, а $x_{1(0)}$ соответствует состоянию покоя груза.

Далее рассматривайте только установившийся режим движения под действием вынуждающей силы. Используйте введенные ранее величины ω_0 и γ .



В1 Отклонение x груза от положения зависит от времени t следующим образом:

0.6

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi_0).$$

Найдите A и φ_0 . Ответы выразите через A_0 , Ω , ω_0 и γ .

Будем называть резонансной такую циклическую частоту колебаний $\Omega_{\text{рез}}$, при которой амплитуда колебаний системы максимальна и обозначается как $A_{\text{рез}}$.

В2 Получите точные выражения для резонансной циклической частоты $\Omega_{\text{рез}}$ и соответствующей ей амплитуды колебаний $A_{\text{рез}}$. Ответы выразите через ω_0 , γ и A_0 . Считайте, что $\gamma\sqrt{2} < \omega_0$. **0.3**

Шириной резонансной кривой $\Delta\omega$ называется разность максимальной и минимальной циклических частот Ω_{max} и Ω_{min} соответственно, при которых амплитуда колебаний меньше резонансной в $\sqrt{2}$ раз.

В3 Получите приближенные выражения для $\Omega_{\text{рез}}$, $A_{\text{рез}}$ и $\Delta\omega$ при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответы выразите через A_0 , ω_0 и γ . **0.3**

Часть С. Влияние поля кольца на движение шара (4.2 балла)

Сплошной однородный шар массой m и радиусом R_0 изготовлен из материала с большим удельным сопротивлением ρ . Его центр может перемещаться вдоль оси вращения кольца радиусом R , плоскость которого горизонтальна.

Силу тока в кольце медленно увеличивают до I и далее поддерживают постоянной. Для определения положения центра шара введём ось x с началом в центре кольца, направленную вверх. Считайте, что диэлектрическая и магнитная проницаемости шара ε и μ соответственно равны единице, а радиус шара R_0 удовлетворяет условиям:

$$R_0 \ll R, x.$$

Из общефизических соображений ясно, что при движении шара со скоростью $\vec{v}$ вдоль оси вращения кольца действующая на него со стороны кольца сила имеет вид:

$$\vec{F} = -\beta(x)\vec{v},$$

где $\beta(x)$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от координаты x центра шара.

Начнём с изучения магнитного поля кольца.

С1 Найдите индукцию B_x магнитного поля кольца на его оси в точке с координатой x . Ответ выразите через x , R , I и магнитную постоянную μ_0 . **0.3**

Рассмотрим исходный шар радиусом R_0 с удельным сопротивлением ρ , находящийся в однородном магнитном поле $\vec{B} = \vec{e}_x B$. Не изменяя направления, величину магнитного поля изменяют со скоростью $dB/dt = \dot{B}$.

Выделим в шаре диск радиусом r_0 и толщиной $h \ll r_0$, основания которого перпендикулярны оси x .

С2 Определите магнитный момент $\vec{m}$ диска. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, r_0 , h , ρ и $\dot{B}$. **1.0**

С3 Определите магнитный момент $\vec{m}$ шара. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, R_0 , ρ и $\dot{B}$. **0.5**

Road to IPhO

Теперь рассмотрим движение шара вдоль оси кольца со скоростью v_x .

C4 Получите производную по времени индукции магнитного поля кольца в центре шара dB_x/dt , эквивалентную величине $\dot{B}$. Ответ выразите через v , I , R , x и магнитную постоянную μ_0 . **0.4**

C5 Найдите коэффициент пропорциональности $\beta(x)$. Ответ выразите через I , R , x , R_0 , ρ и магнитную постоянную μ_0 . **0.5**

Воспользуемся полученным результатом для $\beta(x)$ при определении удельного сопротивления шара по свободным колебаниям, а также по амплитудно-частотной характеристике вынужденных колебаний.

Шар закрепили на одном из концов невесомой непроводящей пружины с коэффициентом жёсткости k . Другой конец пружины закреплён в точке с координатой $x_{1(0)}$.

В положении равновесия центр шара расположен на высоте $H \gg R_0$ над центром кольца.

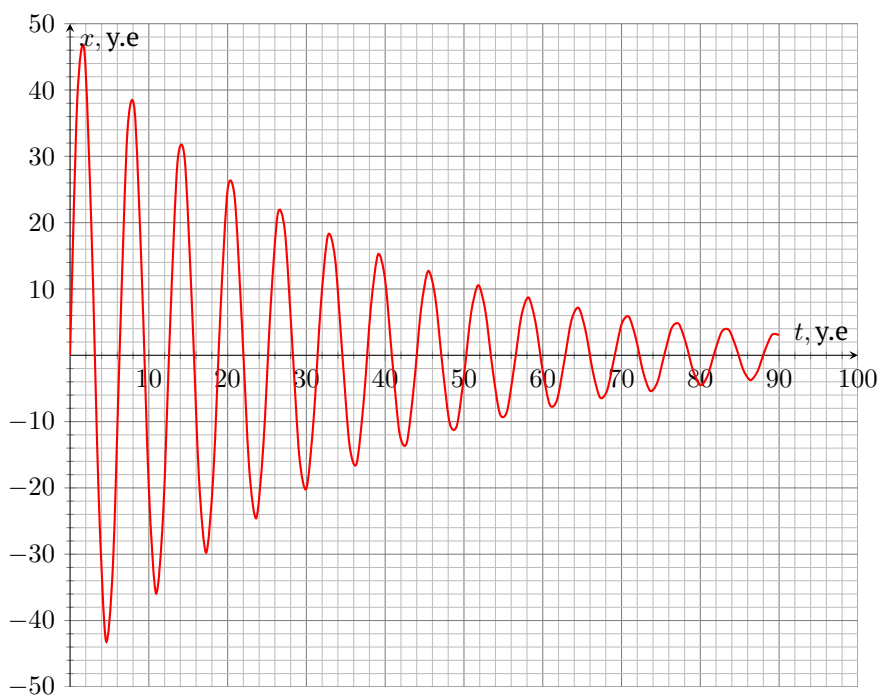
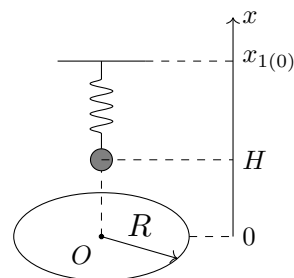
Отклонение центра шара Δx от положения равновесия всегда удовлетворяет условию:

$$\Delta x \ll R, H.$$

На первом графике представлена зависимость отклонения шара от положения равновесия при собственных колебаниях в некоторых условных единицах. Второй конец пружины при этом неподвижен.

На втором графике представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты Ω в некоторых условных единицах. Координата второго конца пружины начинает изменяться по закону:

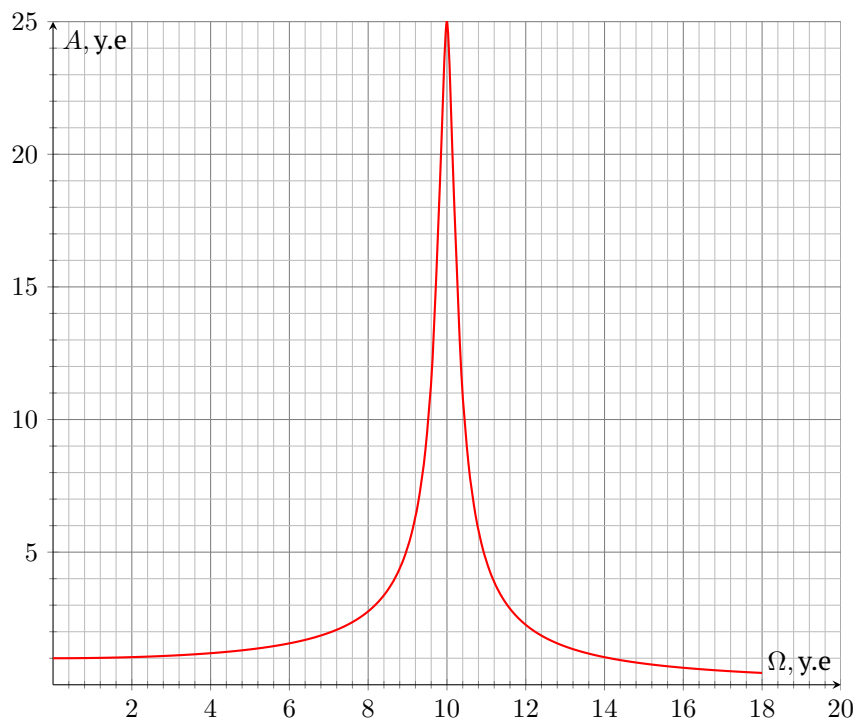
$$x_1(t) = x_{1(0)} + A_0 \sin \Omega t.$$



C6 Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого в первом эксперименте. Ответ выразите через m , k , R_0 , R , H , I и магнитную постоянную μ_0 . **0.8**

C7 Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого во втором эксперименте. Ответ выразите через m , k , R_0 , R , H , I и магнитную постоянную μ_0 . **0.7**

Road to IPhO



Часть D. «Вмороженность» магнитного поля (3.4 балла)

Данная часть задачи посвящена изучению магнитного поля, возникающего в результате перемещения очень хороших проводников в них.

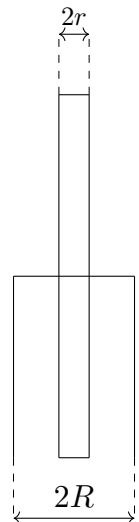
Рассмотрим следующую конструкцию: Соосно полубесконечному круговому соленоиду радиусом R с плотностью намотки витков n и силой тока I в них расположен очень длинный хорошо проводящий цилиндр массой m радиусом $r \ll R$, концы которого расположены по разные стороны от основания соленоида и удалены от него на расстояния, во много раз превышающие его радиус. В изначальном положении цилиндра токи в нём отсутствуют.

Из-за высокой проводимости вещества силовые линии индукции магнитного поля оказываются в него вморожены. Это означает, что при перемещении вещества силовые линии индукции магнитного поля будут перемещаться вместе с ним. В данном случае, соответствующем твёрдому телу, это приводит к тому, что индукция магнитного поля в каждой точке цилиндра будет сохраняться при его перемещении, что обусловлено возникновением в стержне круговых токов Фуко.

Решайте задачу в следующих приближениях:

- Возникающие в цилиндре токи текут только по его поверхности;
- Вне цилиндра индукция магнитного поля равна индукции магнитного поля соленоида;
- Цилиндр отклоняется от изначального положения на величину $x \ll R$;
- Взаимодействием цилиндра с подводящими проводами можно пренебречь;
- За времена, рассматриваемые в данной задаче, затуханием токов в цилиндре можно пренебречь.

Индукцию магнитного поля соленоида будем характеризовать осью z , направленную наружу соленоида вдоль его оси. Начало оси z совпадает с центром основания соленоида.

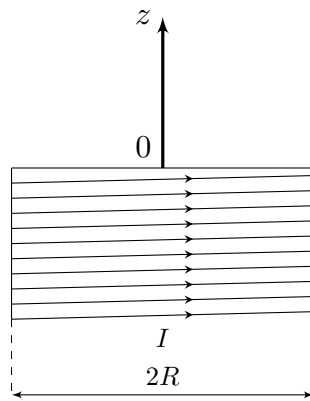


D1 Определите индукцию B_z магнитного поля соленоида, а также её производную dB_z/dz в точке с координатой z . Ответ выразите через μ_0 , n , I , R и z . **0.6**

Пусть цилиндр отклоняют на величину $x \ll R$ вдоль оси z от изначального положения.

D2 Определите линейную плотность тока i на поверхности цилиндра в точке с координатой z . Ответ выразите через μ_0 , x и $dB_z(z)/dz$. **1.0**

Road to IPhO



D3 Определите силу F_x , действующую на цилиндр со стороны магнитного поля соленоида. Ответ выразите **1.5** через μ_0 , r , R , n , I и x .

Пусть в изначальном положении цилиндру сообщили скорость v_0 , направленную вдоль оси z .

D4 Получите зависимость перемещения стержня x от времени t . Ответ выразите через μ_0 , r , R , n , I и m . **0.3**