

A1^{0.30} Пусть залежь нефти представляет собой участок древних речных отложений песчаника в форме параллелепипеда высотой $h = 10$ м, шириной $b = 100$ м и длиной $L = 2000$ м. Пористость породы $\varphi = 0.1$. Оцените запасы нефти $m_{\text{н}}$ в данном месторождении. Выразите ответ через L, b, h, ρ и φ , а также приведите его численное значение в тоннах. Считайте, что нефтяной флюид целиком заполняет объём пор.

Из определения пористости для объёма нефти находим:

$$V_{\text{н}} = \varphi \cdot b h L.$$

Поскольку $m_{\text{н}} = \rho V_{\text{н}}$, имеем:

Ответ:

$$m_{\text{н}} = \rho \varphi b h L = 160 \cdot 10^3 \text{ тонн}.$$

A2^{0.30} Пусть пластовое давление нефти на дне залежей составляет $p_{\text{пл}} = 250$ атм. Найдите, при какой максимальной глубине залегания H_{max} месторождение будет фонтанирующим, т.е. нефть будет вытекать на поверхность под действием собственного давления. Выразите ответ через ρ, g и $p_{\text{пл}}$, а также приведите его численное значение. Сжимаемостью нефти можно пренебречь.

Жидкость будет вытекать под действием пластового давления, если оно превышает давление гидростатического столба нефти:

$$p_{\text{пл}} \geq \rho g h.$$

Таким образом:

Ответ:

$$H_{\text{max}} = \frac{p_{\text{пл}}}{\rho g} \approx 3.125 \text{ км}$$

A3^{0.60} Оцените максимально возможный КИН α_{max} в режиме фонтанирования при пластовом давлении $p_{\text{пл}} = 250$ атм, если сжимаемость нефти $\beta = 5 \cdot 10^{-10}$ Па. Выразите ответ через β и $p_{\text{пл}}$, а также приведите его численное значение. Считайте, что отложения русла рек изолированы непроницаемыми глинами с малой пористостью. Глубина залежей H может быть выбрана произвольным образом.

Как уже говорилось условию - пластовое давление обусловлено сжатием флюида относительно нормальных условий. Если флюид находится под нормальным атмосферным давлением – его фиксированное количество вещества занимает наибольший возможный объём, а значит, наибольшая доля вытесненного флюида достигается, если в конечном состоянии он находится при как можно меньшем давлении. Это можно реализовать, если устремить глубину залежей H к нулю. Имеем:

$$\alpha = \frac{dV}{V} \approx \beta \Delta p.$$

Поскольку пластовое давление во много раз превышает атмосферное – находим:

Ответ:

$$\alpha_{\text{max}} \approx \beta p_{\text{пл}} \approx 1.25\%.$$

A4^{0.30} При тех же самых данных оцените максимально возможный КИН α_{max} в режиме фонтанирования, если снизу в пластовых отложениях находится вода объёмом kV_0 ($k = 9$) при начальных запасах нефти V_0 . Сжимаемость воды считайте равной сжимаемости нефти. Выразите ответ через β и $p_{\text{пл}}$, а также приведите его численное значение. Считайте что забор жидкости происходит сверху, т.е. забирается только нефть. Глубина залежей H может быть выбрана произвольным образом.

Аналогично предыдущему пункту, глубина залежей H должна стремиться к нулю. Однако в данном случае КИН серьёзно возрастает, поскольку разжимается не только флюид, но и вода, и, поскольку забирается только нефть, забираемый её объём dV складывается из изменения объёмов нефти и воды::

$$\alpha = \frac{dV}{V_0} = \frac{dV_{\text{н}} + dV_{\text{в}}}{V_0} = (1 + 9)\beta \Delta p.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\alpha_{\text{max}} = 10\beta p_{\text{пл}} \approx 12.5\%.$$

B1 ^{1.00} Рассмотрим горизонтальное течение жидкости вдоль оси x между двумя параллельными плоскостями высотой h . Расстояние между плоскостями $w \ll h$. Определите объёмный расход (далее во всех пунктах задачи — поток) жидкости Q через поперечное сечение wh . Ответ выразите через η , w , h и градиент давления $dp(x)/dx$.

Получим распределение скоростей жидкости вдоль координаты z , направленной перпендикулярно направлению потока от одной пластины к другой. Начало оси z расположено посередине между пластинами. Из условия сохранения импульса имеем:

$$-hdzdp + \eta h dx \left(\frac{dv(z+dz)}{dz} - \frac{dv(z)}{dz} \right) = 0,$$

откуда:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}.$$

Интегрируя один раз, находим:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z}{\eta} \frac{dp}{dx} + A.$$

Поскольку скорость посередине между пластинами испытывает экстремум — $A = 0$. Тогда повторно интегрируя, находим:

$$v(z) = C + \frac{z^2}{2\eta} \frac{dp}{dx}.$$

При $z = \pm w/2$ скорость должна обращаться в ноль, откуда находим:

$$v(z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(\frac{w^2}{4} - z^2 \right).$$

Для потока Q имеем:

$$Q = \int_{-w/2}^{w/2} v(z) h dz = -\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dx} \int_{-w/2}^{w/2} \left(\frac{w^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

Интегрируя, находим:

Ответ:

$$Q = -\frac{w^3 h}{12\eta} \frac{dp}{dx}.$$

B2 ^{1.00} В центре щели создается избыточное давление Δp . Найдите зависимость избыточного давления p' в щели от координаты x . Ответ выразите через Δp , Q , E , h , η и x .

Поскольку поток жидкости одинаково растекается в две разные стороны — в каждой из них он равен $Q/2$. Пусть ось x имеет начало в центре щели и направлена вдоль одного из потоков. Воспользуемся результатом пункта B1:

$$\frac{Q}{2} = -\frac{w^3 h}{12\eta} \frac{dp'}{dx}.$$

Воспользовавшись эмпирическим соотношением для ширины щели, получим:

$$\frac{Q}{2} = -\frac{h^4 p'^3}{12\eta E^3} \frac{dp'}{dx}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_{\Delta p}^{p'(x)} p'^3 dp' = \frac{p'^4(x) - \Delta p^4}{4} = -\frac{6Q\eta E^3 x}{h^4}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$p'(x) = \sqrt[4]{\Delta p^4 - \frac{24Q\eta E^3 x}{h^4}}.$$

B3^{0.20} Трещина заканчивается в положении, соответствующем равному нулю избыточному давлению. Определите длину трещины L . Ответ выразите через Δp , E , h , η и Q .

При максимальной длине трещины давление p' обращается в ноль, откуда полудлина трещины $L/2$ составляет:

$$\frac{L}{2} = \frac{\Delta p^4 h^4}{24 Q \eta E^3}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$L = \frac{\Delta p^4 h^4}{12 Q \eta E^3}.$$

B4^{0.70} Определите объем трещины V . Ответ выразите через Δp , h , η , Q и E .

Объём трещина равен удвоенному объёму её половины:

$$V = 2 \int_0^L h w(x) dx = 2 \int_0^L \frac{h^2 p'}{E} dx.$$

Воспользуемся выражением для $p'(x)$:

$$V = \frac{2 h^2 \Delta p}{E} \int_0^L \sqrt[4]{1 - \frac{24 Q \eta E^3 x}{h^4 \Delta p^4}} dx = \frac{h^6 \Delta p^5}{12 Q \eta E^4} \int_0^1 \sqrt[4]{1 - z} dz.$$

После элементарного интегрирования находим:

Ответ:

$$V = \frac{h^6 \Delta p^5}{15 Q \eta E^4}.$$

B5^{0.30} Рассчитайте максимально возможные значения длины трещины L_{max} и её объёма V_{max} .

Ответ:

$$L_{max} \approx 83 \text{ м.}$$

Ответ:

$$V_{max} = 6.7 \text{ м.}$$

C1^{1.00} Определите скорость v движения границы жидкостей при перемещении фронта на величину S . Ответ выразите через p_1 , p_2 , L , η_1 , η_2 , k_1 и k_2 .

Закон Дарси в рамках задачи можно переписать в следующей форме:

$$v = - \frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Скорость движения v одинакова для обеих жидкостей и постоянна по всей длине L . Тогда для градиентов давления в нефти и в воде с учётом равенства их проницаемостей $k_1 = k_2 = k$ получим:

$$\frac{\partial p_{\text{н}}}{\partial x} = - \frac{\eta_1 v}{k_1} \quad \frac{\partial p_{\text{в}}}{\partial x} = - \frac{\eta_2 v}{k_2}.$$

Для полного изменения давления находим:

$$p_2 - p_1 = \frac{\eta_2 S v}{k_2} + \frac{\eta_1 (L - S) v}{k_1}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$v = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\eta_1 L}{k_1} + \left(\frac{\eta_2}{k_2} - \frac{\eta_1}{k_1} \right) S}.$$

C2 0.90

Определите зависимость перемещения S фронта от времени t . Ответ выразите через $p_1, p_2, L, \eta_1, \eta_2, k$ и t

Поскольку $v = dx/dt$ и $k_1 = k_2 = k$, имеем:

$$dt = \frac{(\eta_1 L + (\eta_2 - \eta_1)S)dS}{k(p_2 - p_1)}.$$

Интегрируя, найдём:

$$t = \frac{1}{k(p_2 - p_1)} \int_0^S (\eta_1 L + (\eta_2 - \eta_1)x)dx = \frac{1}{k(p_2 - p_1)} \left(\eta_1 LS + \frac{(\eta_2 - \eta_1)S^2}{2} \right).$$

Приведём квадратное уравнение к классическому виду:

$$S^2 - \frac{2\eta_1 LS}{\eta_1 - \eta_2} + \frac{2k(p_2 - p_1)t}{\eta_1 - \eta_2} = 0.$$

Решая, получим:

$$S(t) = \frac{\eta_1 L}{\eta_1 - \eta_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta_1 L}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2 - \frac{2k(p_2 - p_1)t}{\eta_1 - \eta_2}}.$$

Поскольку $x(0) = 0$ – выберем корень со знаком минус.

Окончательно:

Ответ:

$$S(t) = \frac{\eta_1 L}{\eta_1 - \eta_2} - \sqrt{\left(\frac{\eta_1 L}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2 - \frac{2k(p_2 - p_1)t}{\eta_1 - \eta_2}}.$$

C3 0.50

Определите полное время τ вытеснения нефти из месторождения. Выразите ответ через $p_1, p_2, L, \eta_1, \eta_2$ и k и рассчитайте его.

Полное время τ вытеснения нефти равняется $t(L)$.

Таким образом:

Ответ:

$$\tau = \frac{(\eta_1 + \eta_2)L^2}{2k(p_2 - p_1)} \approx 26 \text{ лет.}$$

C4 0.80

При каком условии на параметры системы движение границы будет устойчивым, то есть при малом отклонении формы границы от плоской это отклонение не будет возрастать? Запишите условие устойчивости через η_1, η_2, k_1 и k_2 .

Устойчиво ли течение жидкости, рассмотренное в пунктах C2 и C3?

Отклонение не будет возрастать, если $v(x + dx) < v(x)$.

Обратим внимание, что числитель выражения для скорости постоянный, а знаменатель является линейной функцией x с угловым коэффициентом $a = \eta_2/k_2 - \eta_1/k_1$.

Величина скорости уменьшается с ростом x , если величина a является положительной, т.е при условии:

Ответ:

$$\frac{\eta_2}{k_2} > \frac{\eta_1}{k_1}.$$

Ответ: Движение рассматриваемой конструкции неустойчиво.

D1 ^{0.80} Найдите зависимость скорости течения жидкости в такой трубе от расстояния до оси трубы $v(r)$, максимальное значение скорости v_{max} и полный поток Q жидкости через сечение цилиндра. Ответы выразите через Δp , η , L , R и r .

Выделим цилиндр радиусом r длиной L . Запишем условие постоянства его импульса:

$$\pi r^2 \Delta p + 2\pi r L \eta \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{\eta L}.$$

Интегрируя, получим:

$$v = C - \frac{\Delta p r^2}{4\eta L}.$$

Поскольку $v(R) = 0$, получим:

Ответ:

$$v(r) = \frac{\Delta p (R^2 - r^2)}{4\eta L}.$$

Для потока Q имеем:

$$Q = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr.$$

Интегрируя, находим:

Ответ:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta L}.$$

D2 ^{0.20} Выразите распределение скорости течения жидкости $v(r)$ через полный поток Q , R и r .

Выразим комбинацию $\Delta p / (4\eta L)$ через полный поток Q :

$$\frac{\Delta p}{4\eta L} = \frac{2Q}{\pi R^4}.$$

Подставляя в выражение для $v(r)$, находим:

Ответ:

$$v(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

D3 ^{0.20} Найдите поток Q в сечении забоя на расстоянии h от его нижнего края и соответствующее выражение для вертикальной скорости $v(r, h)$ в зависимости от расстояния до оси r и высоты h . Ответы выразите через Q_0 , H , R , r и h .

Поскольку жидкость поступает в цилиндр равномерно по его боковой поверхности, имеем:

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{Q_0}{H}.$$

Поскольку $Q(0) = 0$, находим:

Ответ:

$$Q(h) = \frac{Q_0 h}{H}.$$

Воспользуемся выражением, полученным в пункте D2:

$$v(r,h) = \frac{2Q(h)}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Подставляя $Q(h)$, получим:

Ответ:

$$v(r,h) = \frac{2Q_0 h}{\pi R^2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

D4 ^{0.30} Рассмотрим кольцо высотой dh с внутренним и внешним радиусами r и $r + dr$ соответственно. Используя тот факт, что жидкость несжимаема, покажите, что из условия постоянства объёма жидкости внутри выделенного кольца следует соотношение:

$$\frac{\partial v}{\partial h} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r}.$$

Вы можете использовать это соотношение, даже если не смогли его доказать.

Запишем выражение для полного потока жидкости q в кольцо:

$$q = 2\pi r dr v(r, h + dh) - 2\pi r dr v(r, h) + 2\pi dh (r + dr) u_r(r + dr, h) - 2\pi dh r u_r(r, h) = 0.$$

Таким образом:

$$2\pi r dr dv + 2\pi dr d(r u_r) = 0,$$

или же:

$$\frac{\partial v}{\partial h} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

D5 ^{0.50} Найдите радиальную скорость течения жидкости $u_r(r, h)$ в зависимости от расстояния до оси r и высоты h , а также максимальную величину её модуля $u_{r(max)}$. Ответы выразите через Q_0 , R , H , h и r .

Последовательно воспользуемся результатами пунктов D4 и D3:

$$\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial v}{\partial h} = -\frac{2Q_0 r}{\pi R^2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Обратим внимание, что при $r = 0$ величина $r u_r$ также равна нулю. Временно переобозначим r на z в подынтегральной функции и получим:

$$r u_r(r, h) = -\frac{2Q_0}{\pi R^2 H} \int_0^r \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) z dz = -\frac{Q_0}{\pi R^2 H} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right).$$

Таким образом:

Ответ:

$$u_r(r, h) = -\frac{Q_0}{\pi R^2 H} \left(r - \frac{r^3}{2R^2}\right).$$

Максимум величины u_r достигается при равенстве нулю её производной по r :

$$\frac{du_r}{dr} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3r^2}{2R^2} = 0 \Rightarrow r_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

Тогда для максимального значения радиальной компоненты скорости u_{max} находим:

Ответ:

$$u_{max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{Q_0}{\pi R H}.$$

D6^{0.10} Чему равно отношение $u_{r(max)}/v_{max}$? Ответ выразите через R и H .

Ответ:

$$\frac{u_{r(max)}}{v_{max}} = \frac{\sqrt{2}R}{3\sqrt{3}H}$$