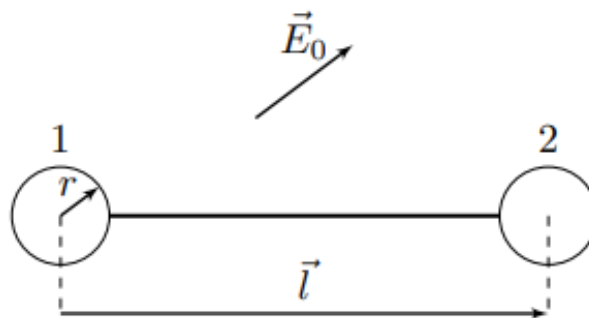




Данная задача посвящена исследованию динамики системы проводящих тел, помещённой в однородное электростатическое поле напряжённостью $\vec{E}_0$. Рассматриваемая система является электрически нейтральной гантелью, состоящей из двух металлических шаров радиусом r с расстоянием $l \gg r$ между их центрами. Шары соединены очень тонким цилиндрическим стержнем. Масса каждого из шаров равна m , а массой стержня можно пренебречь. Введём вектор $\vec{l}$, обозначающий радиус-вектор второго шара относительно первого (см. рис).



Часть А. Металлический стержень (2.0 балла)

В данной части задачи шары соединены металлическим стержнем.

Будем называть наведёнными дипольными моментами шаров и стержня дипольные моменты электрически нейтральных шара и стержня соответственно, приобретаемые ими при помещении в электростатическое поле вдали от других тел.

Во всех пунктах данной задачи пренебрегайте наведёнными дипольными моментами шаров и стержня, а также считайте распределения зарядов по поверхностям шаров равномерными.

A1 ^{0.50} Определите дипольный момент гантели $\vec{p}$. Ответ выразите через $\vec{E}_0$, r , ε_0 и $\vec{l}$.

A2 ^{0.20} Определите момент сил $\vec{M}$, действующих на гантель. Ответ выразите через $\vec{E}_0$, r , ε_0 , $\vec{l}$.

A3 ^{0.20} Найдите положения равновесия системы. В качестве ответа укажите значения углов α_0 между стержнем и направлением напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$.

A4 ^{0.50} Какие из найденных вами в пункте **A3** положения равновесия являются устойчивыми, а какие – неустойчивыми? Ответ обоснуйте. Найдите также периоды малых колебаний вблизи положений устойчивого равновесия. Ответы выразите через l , R , m , E_0 и ε_0 .

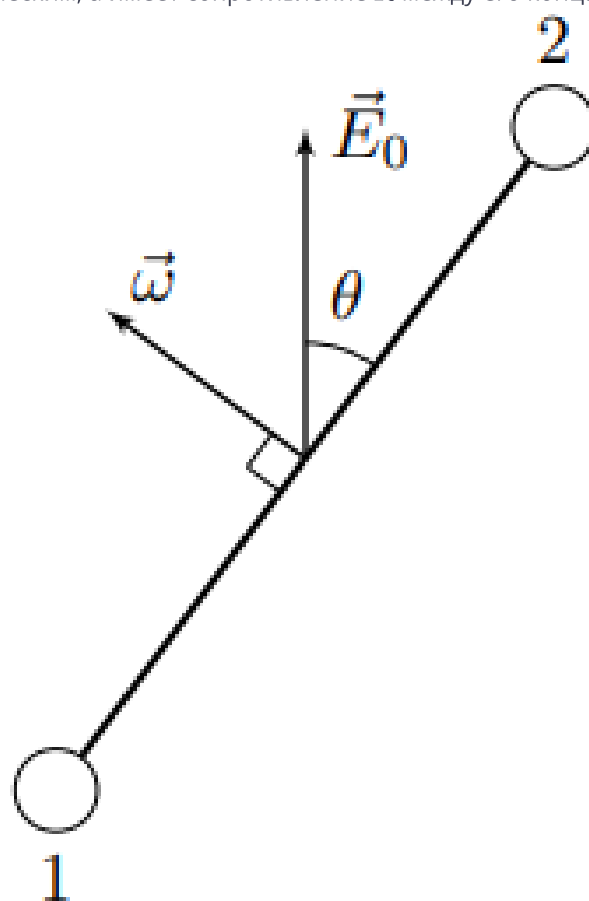
A5 ^{0.60} В устойчивом положении равновесия стержню мгновенно придали угловую скорость $\vec{\omega}_0$ перпендикулярную электрическому полю. При какой минимальной начальной угловой скорости ω_{min} гантель сможет совершить полный оборот? Ответ выразите через l , r , m , E_0 и ε_0 .

Часть В. Вращение с постоянной угловой скоростью (2.6 балла)

Пусть система вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню, с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Направление напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$ образует угол θ с плоскостью, в которой движется стержень (см. рис).

На рисунке показано положение гантели в момент, когда стержень лежит в плоскости, содержащей ось вращения и направление напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$. Примите за момент времени $t = 0$ положение, соответствующее рисунку.

В данной части задачи стержень не является металлическим, а имеет сопротивление R между его концами.



B1 ^{0.90} Запишите уравнение, определяющее силу тока I в стержне. Покажите, что сила тока в нашей системе равна силе тока в некотором RLC контуре, подключенном к генератору переменного гармонического напряжения $\mathcal{E}(t)$.

Используя полученное уравнение, определите параметры эквивалентной схемы: зависимость от времени ЭДС эквивалентного генератора $\mathcal{E}_{eff}(t)$, индуктивность L_{eff} , ёмкость C_{eff} и сопротивление R_{eff} . Ответы выразите через E_0 , l , r , ε_0 , ω , θ и t .

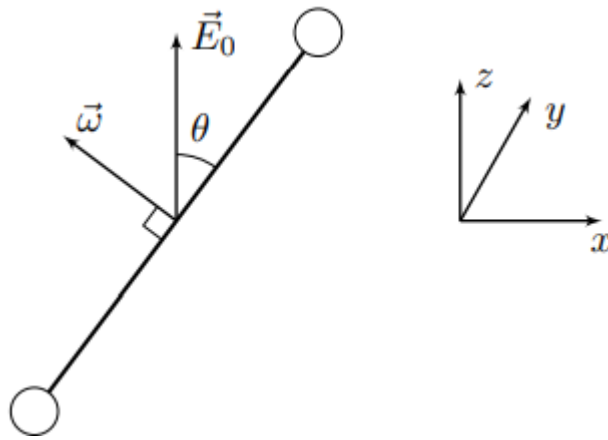
Далее во всех пунктах задачи считайте, что в системе происходят только вынужденные колебания.

B2 ^{0.50} Получите зависимость от времени t проекции $p_l(t)$ дипольного момента гантели на ось, направленную вдоль вектора $\vec{l}$. Ответ выразите через E_0 , l , r , ε_0 , ω , θ и t .

Во всех последующих пунктах задачи, если стержень имеет сопротивление R , оно является настолько малым, что напряжение на резисторе много меньше эффективной амплитуды $\mathcal{E}_0$ напряжения из пункта B1.

B3 ^{0.20} Упростите ваш ответ для $p_l(t)$, полученный в пункте B2, с учётом малости сопротивления R . Упрощённый ответ должен содержать только величины, порядок малости по R которых не превышает первый. Ответ выразите через $E_0, l, r, R, \varepsilon_0, \omega, \theta$ и t .

Введём прямоугольную декартову систему координат xyz так, как показано на рисунке. Здесь ось z направлена вдоль направления напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$, а ось x лежит в плоскости рисунка.



B4 ^{1.00} Определите средние за большое время компоненты дипольного момента $\langle p_x \rangle$, $\langle p_y \rangle$ и $\langle p_z \rangle$ гантели. Ответы выразите через $E_0, l, r, R, \varepsilon_0, \omega$ и θ .

Часть C. Плоское движение гантели (0.8 балла)

В данной части задачи сопротивление стержня равно R . В положении устойчивого равновесия стержню придать большую угловую скорость $\vec{\omega}_0$, перпендикулярную направлению напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$. Считайте, что $\omega_0 \gg \omega_{min}$, где ω_{min} была определена вами в пункте A5.

C1 ^{0.50} Найдите зависимость от времени t угловой скорости стержня $\omega(t)$, считая, что $\omega(t) \gg \omega_{min}$ в любой момент времени, а $t \gg 2\pi/\omega_0$. Ответ выразите через $\omega_0, E_0, l, r, R, \varepsilon_0$ и t .

C2 ^{0.30} Оцените время τ , через которое стержень перестанет делать полные обороты. Ответ выразите через ω_0, E_0, l, r, R и ε_0 .

Часть D. Прецессия стержня (4.6 балла)

Данная часть задачи посвящена изучению динамики пространственного движения гантели в электростатическом поле.

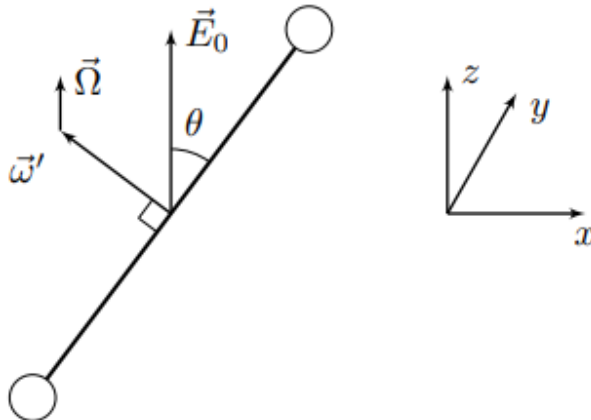
Оказывается, что для очень быстро вращающейся гантели существует режим движения, при котором она в среднем испытывает регулярную прецессию вокруг оси z .

Под регулярной прецессией подразумевается такой режим движения гантели, при котором плоскость вращения стержня вращается вокруг оси z с постоянной средней угловой скоростью Ω_z , а угол θ между плоскостью движения стержня и направлением напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$ остаётся постоянным.

В режиме, соответствующей регулярно прецессии, вектор угловой скорости гантели $\vec{\omega}$ представляется в следующем виде:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\Omega}.$$

Здесь $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{e}_z$ – вектор средней угловой скорости прецессии плоскости движения стержня, а $\vec{\omega}'$ – вектор угловой скорости гантели в системе отсчёта, вращающейся со средней угловой скоростью прецессии плоскости движения стержня.



В данной части задачи:

- Считайте, что в любой момент гантель вращается с угловой скоростью ω' , во много раз превышающей ω_{min} ;
- Если не указано обратное, считайте, что угловая скорость ω' во много раз превышает среднюю угловую скорость прецессии Ω_z .
- Все компоненты вектора угловой скорости стержня (в том числе $d\theta/dt = \dot{\theta}$) могут считаться постоянным в течение времени, за которое стержень совершает один оборот в своей плоскости вращения;
- Все уравнения движения стержня записывайте в виде усреднённых за время одного оборота стержня в своей плоскости вращения.

Пусть в пунктах D1 и D2 стержень является металлическим.

D1 ^{0.50} Получите точное выражение для момента импульса $\vec{L}$ гантели в режиме регулярно прецессии. Ответ выразите через $m, l, \vec{\omega}'$ и $\vec{\Omega}$. Упростите ваш ответ с учётом $\Omega_z \ll \omega'$.

D2 ^{1.50} Покажите, что возможен такой режим движения гантели, при котором она в среднем испытывает регулярную прецессию вокруг оси z . Приведите все соответствующие уравнения движения, на основании которых вы производите доказательство. Определите для данного режима движения среднюю угловую скорость прецессии плоскости движения стержня Ω_z . Ответ выразите через $E_0, \varepsilon_0, m, l, r, R, \omega'$ и θ . Также выразите ответ через ω_{min}, ω' и θ и убедитесь, что $\Omega_z \ll \omega'$.

Пусть в начальный момент времени напряжённость электростатического поля $\vec{E}_0$ составляет угол θ_0 со стержнем (см. рисунок).

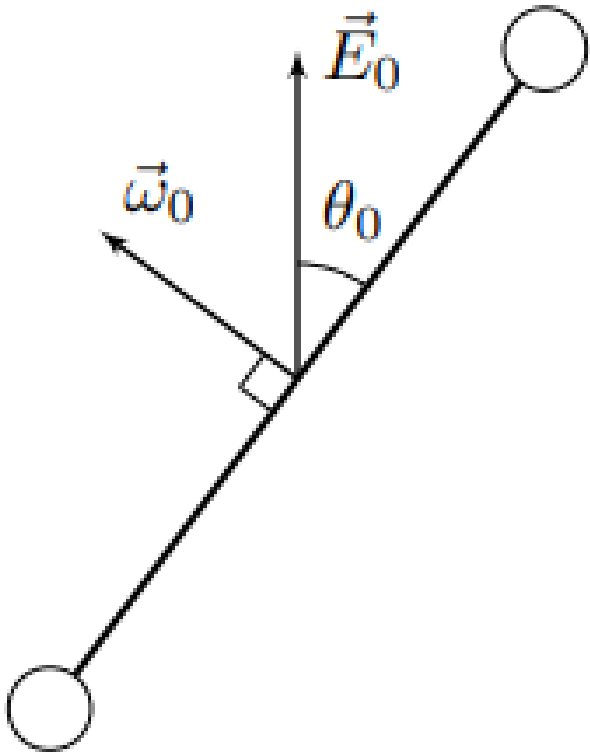
Гантели мгновенно придать угловую скорость $\vec{\omega}_0$, модуль который много больше ω_{min} , направленную перпендикулярно стержню так, как показано на рисунке.

Учтем сопротивление стержня R . В силу малости R по-прежнему можно считать, что напряжение на резисторе много меньше эффективной амплитуды $\mathcal{E}$ напряжения из пункта B1.

За время порядка $1/\omega_0$ гантель переходит в режим движения, соответствующий медленно изменяющейся прецессии. За время перехода потерями кинетической энергии гантели можно пренебречь. При медленно изменяющейся прецессии величины Ω_z и θ изменяются со временем очень медленно в силу малости сопротивления R . Поскольку угол θ начинает изменяться, то для данного режима движения гантели вектор угловой скорости записывается в следующей форме:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \Omega_z \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_y.$$

Здесь $\vec{\omega}'$ всё также направлен перпендикулярно плоскости движения стержня. Во всех последующих пунктах считайте, что $\omega' \gg \dot{\theta}, \Omega$.



- D3^{0.50} Чему равна установившаяся угловая скорость вращения стержня ω_∞ спустя большой промежуток времени? Ответ выразите через ω_0 и θ_0 .
- D4^{0.50} Получите зависимость средней угловой прецессии Ω_z от угла θ . Ответ выразите через ω_{min} , ω_0 , θ_0 и θ .
- D5^{1.00} Получите зависимость от времени t величины θ при $t \gg 2\pi/\omega_0$. Ответ выразите через θ_0 , E_0 , m , r , R , ε_0 и t .
- D6^{0.40} Определите максимальное значение величины $\dot{\theta}$. Ответ выразите через θ_0 , E_0 , m , r , R и ε_0 . Убедитесь, что $\dot{\theta}_{max} \ll \omega_0$.
- D7^{0.20} Найдите зависимость скорости прецессии от времени $\Omega(t)$. Ответ выразите через E_0 , ω_0 , m , r , R , ε_0 , θ_0 и t .