



Взаимодействие электромагнитного поля с немагнитными жидкостями в случае высокой проводимости жидкости хорошо изучено в рамках магнитной гидродинамики (МГД). В данном случае можно пренебречь электрическими эффектами по сравнению с магнитными. Изученные в рамках МГД эффекты давно нашли широкое техническое применение и используются по сей день. Например, МГД устройства применяются в водных судах или для конструкций металлургического перемешивания.

Менее изученным является противоположный случай взаимодействия электромагнитного поля с немагнитными жидкостями в случае низкой проводимости жидкости. В этом случае можно пренебречь магнитными эффектами по сравнению с электрическими.

Данная область науки получила название электрогидродинамики (ЭГД) и активно развивается около 70 последних лет. Она нашла широкое техническое применение в современном мире. На её основе построены струйный принтеры, а также они используются в ионизаторах, для изготовления тонких полимерных нитей и капилляров.

Наиболее интересным для исследований с научной точки зрения является случай промежуточных значений удельной проводимости, когда необходимо учитывать как электрические, так и магнитные эффекты, возникающие при движении жидкости в электромагнитном поле. Данное направление науки называется электромагнитной гидродинамикой (ЭМГД).

В рамках данной задачи вам предлагается изучить динамику движения жидкости внутри плоского и цилиндрического конденсаторов, помещённых в однородное магнитное поле.

Точное решение задач ЭМГД является очень сложным. В рамках данной задачи примем следующую модель:

- Все внешние электромагнитные поля являются стационарными;
- Все рассматриваемые движения являются стационарными;
- Собственным магнитным полем, создаваемым токами, текущими в жидкости, можно пренебречь, т.е магнитное поле во всех точках пространства равно внешнему магнитному полю $\vec{B}(\vec{r})$;
- Внешнее магнитное поле $\vec{B}(\vec{r})$ создано токами, текущими вне жидкости;
- Во всех точках жидкости объёмная плотность свободного заряда равна нулю.

Считайте известными и постоянными все следующие величины:

- Плотность жидкости ρ ;
- Удельная проводимость жидкости σ ;
- Коэффициент динамической вязкости жидкости η ;
- Магнитная проницаемость жидкости $\mu \approx 1$.

Для решения задачи вам понадобится корректная формулировка закона вязкости Ньютона.

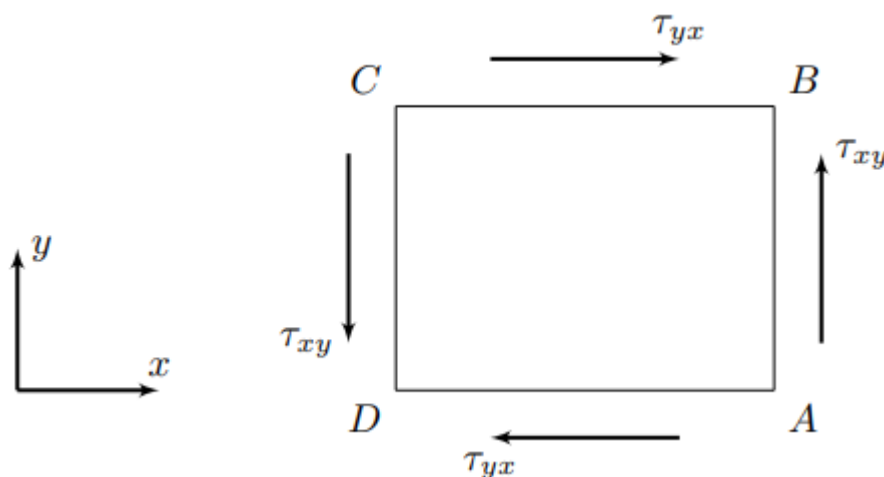
Рассмотрим грань AB бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда жидкости, лежащую в плоскости yz прямоугольной системы координат xuz . Касательным напряжением τ_{xy} , действующим на рассматриваемую грань параллелепипеда, называется отношение силы, действующей на данное сечение параллелепипеда в направлении оси y , к площади поверхности рассматриваемой грани. Здесь первый индекс обозначает направление нормали к поверхности грани, а второй индекс – направление действия касательного напряжения.

Из закона сохранения момента импульса для вещества следует, что касательное напряжение τ_{yx} , действующее на грань BC данного параллелепипеда, лежащую в плоскости xz , в направлении оси x , равно величине τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Здесь направления координатных осей x и y определяются направлениями внешних нормалей к граням AB и BC параллелепипеда.

При этом соответствующие касательные напряжения, действующие на противоположные грани CD и AD параллелепипеда, должны быть направлены противоположно, поскольку для них направления нормали являются противоположными.



Закон вязкости Ньютона гласит, что касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ пропорционально скорости деформации сдвига, что выражается следующей формулой:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

Здесь частные производные вычисляются в один и тот же момент времени.

Данное выражение применимо в любой системе отсчёта при условии, что проекции скорости v_x и v_y и координаты (x, y) вычисляются относительно выбранной системы отсчёта.

Часть А. Уравнения ЭМГД (0.8 балла)

Ключевым соотношением в ЭМГД является связь плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$ с величинами удельной проводимости σ , напряжённости электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$, индукции магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$, а также скорости движения жидкости $\vec{v}(\vec{r})$.

Вам известен закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Этот закон применим только для неподвижных проводников. Если же проводник движется в магнитном поле, то данное уравнение становится неприменимым, а уравнение, описывающее распределение токов в проводнике, требует учёта взаимодействия движущихся в проводнике зарядов с магнитным полем.

В общем случае величина плотности тока в проводнике определяется выражением:

$$\vec{j} = \sigma \left\langle \frac{\vec{F}}{q} \right\rangle,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд q со стороны электромагнитного поля. Данная сила должна уравниваться силой, действующей на заряд q со стороны вещества проводника. Здесь усреднение проводится по всем зарядам, участвующим в упорядоченном движении. Считайте известным, что скорости зарядов относительно проводников являются крайне малыми.

A1 ^{0.30} Пусть $\vec{v}$ – скорость жидкости в некоторой точке пространства. Чему равна плотность тока $\vec{j}$ в данной точке пространства? Ответ выразите через σ , $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{v}$.

A2 ^{0.20} Определите силу $\vec{f}_B$, действующих на единицу объёма жидкости со стороны магнитного поля. Ответ выразите через σ , $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{v}$.

A3 ^{0.30} Покажите, что если объёмная плотность свободного заряда в любой точке жидкости равна нулю, то и объёмная плотность полного заряда также равна нулю в любой точке жидкости.

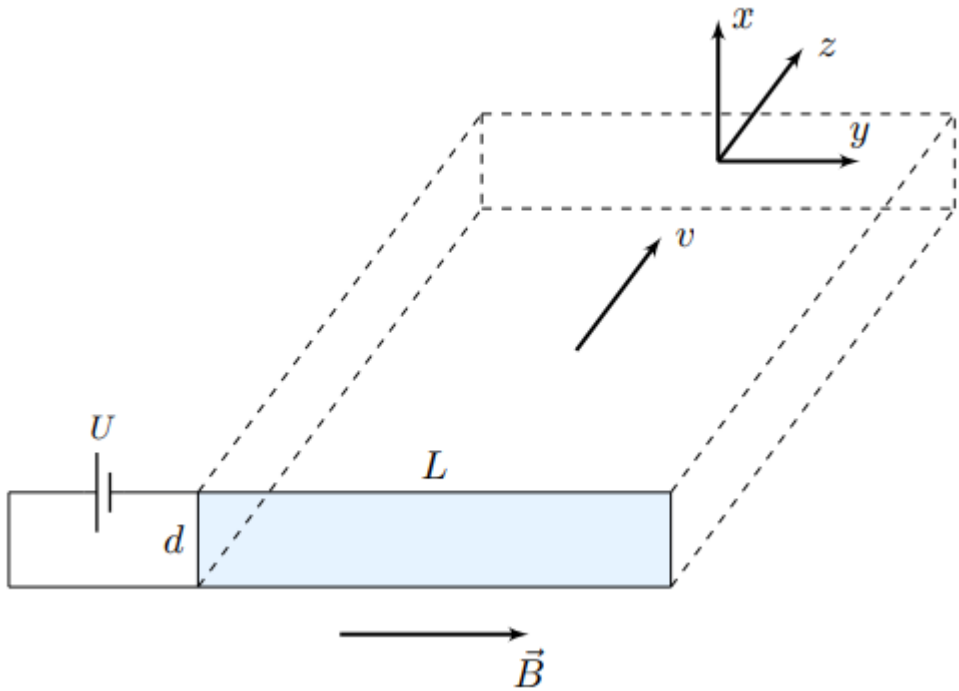
Часть В. Течение жидкости в плоском конденсаторе (3.3 балла)

Рассмотрим плоский конденсатор с расстоянием d между пластинами, подключенный к источнику постоянного напряжения U . Ширина пластин конденсатора равна $L \gg d$, а их длина также во много раз больше расстояния d между обкладками.

Введём систему координат $x y z$ так, как показано на рисунке. Ось x направлена перпендикулярно обкладкам, а её начало расположено посередине между обкладками. Ось y направлена вдоль стороны L обкладок конденсатора, а ось z дополняет тройку $x y z$ до правой.

Система помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B} = B \vec{e}_y$.

В пространстве между обкладками стационарно течёт проводящая жидкость плотностью ρ с проводимостью σ и коэффициентом динамической вязкости η .



При решении данной части задачи используйте следующую модель:

- Напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля можно считать однородной во всей области между обкладками конденсатора;
- Скорость v жидкости в каждой точке пространства между обкладками направлена вдоль оси z ;
- В силу соотношения $L \gg d$ конденсатор можно считать бесконечно широким;
- Считайте давление жидкости одинаковым в каждой точке пространства между обкладками и равным давлению на входе и выходе из пространства между обкладками.

B1 ^{0.30} Из общефизических соображений найдите, чему равна сила $\vec{f}_E$, действующая на единицу объёма жидкости со стороны электростатического поля? Ответ обоснуйте.

B2 ^{1.00} Покажите, что зависимость скорости жидкости от координаты x можно представить в виде:

$$v(x) = A \cosh \omega x + B \sinh \omega x + C.$$

Определите A , B , C и ω . Ответы выразите через σ , η , U , B и d .

B3 ^{0.20} Определите максимальную скорость течения жидкости v_{max} . Ответ выразите через σ , η , U , B и d .

B4 ^{0.40} Получите зависимость $v(x)$ для случая слабого магнитного поля ($Bd \ll \sqrt{\sigma/\eta}$). Определите максимальное значение скорости v_{max} . Ответы выразите через σ , η , U , B , d и x .

Постройте качественный график полученной зависимости $v(x)$. Отметьте на графике все важные точки.

B5 ^{0.30} Определите максимальное значение скорости жидкости v_{max} для случая сильного магнитного поля ($Bd \gg \sqrt{\sigma/\eta}$). Ответ выразите через σ , η , U , B и d .

Постройте качественный график зависимости $v(x)$ для случая сильного магнитного поля. Отметьте на графике все важные точки.

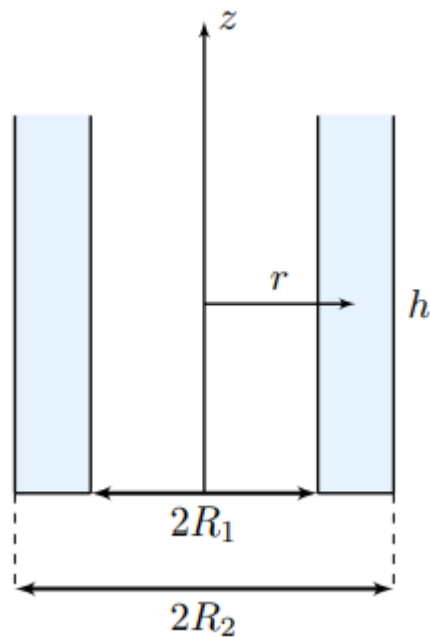
B6 ^{0.30} Получите зависимость массового расхода жидкости Q через поперечное сечение $x y$ конденсатора. Ответ выразите через ρ , σ , η , U , B , d и L .

B7 ^{0.40} Получите приближения для $Q(B)$ в случаях слабого и сильного магнитного полей ($Bd \ll \sqrt{\sigma/\eta}$ и $Bd \gg \sqrt{\sigma/\eta}$ соответственно). Ответы выразите через ρ , σ , η , U , B , d и L .

B8 0.40

Постройте качественный график зависимости массового расхода Q от индукции магнитного поля B . Отметьте на графике все важные точки.

Во всех остальных частях задачи рассматривается конденсатор, состоящий из двух очень длинных coaxial цилиндрических обкладок. Радиус внутренней обкладки равен R_1 , а радиус внешней – R_2 . Высота цилиндров одинакова и равна $h \gg R_1, R_2$. Основания обкладок совпадают. Пространство между обкладками заполнено проводящей жидкостью плотностью ρ с проводимостью σ и коэффициентом динамической вязкости η . Расстояние от оси цилиндров до произвольной точки в жидкости обозначим за r . Также введём ось z , направленную вдоль оси цилиндров.

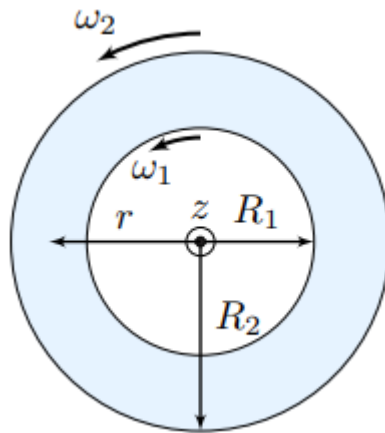


Часть С. Жидкость в цилиндрическом конденсаторе в отсутствие электромагнитного поля (1.5 балла)

Для начала рассмотрим движение жидкости в отсутствие электромагнитного поля.

Пусть внутренняя и внешняя обкладки вращаются с постоянными угловыми скоростями, проекции которых на ось z равны ω_1 и ω_2 соответственно.

В установившемся режиме траектории элементов жидкости представляют собой окружности, перпендикулярные оси z , центры которых расположены на последней.



C1 1.30

Определите проекции на ось z моментов сил M_1 и M_2 , прикладываемых к внутренней и внешней обкладкам соответственно сторонними силами для поддержания их стационарного движения. Ответ выразите через η , ω_1 , ω_2 , R_1 , R_2 и h .

C2 0.20

Получите зависимость скорости движения жидкости $v(r)$ от расстояния r до оси цилиндров. Ответ выразите через ω_1 , ω_2 , R_1 , R_2 и r .

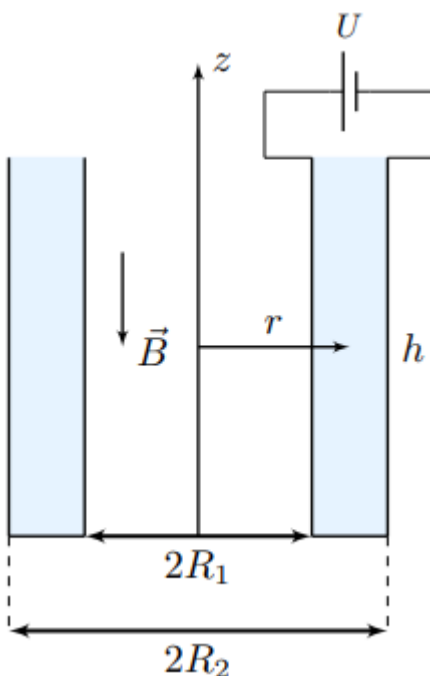
Часть D. Уравнения движения жидкости в цилиндрическом конденсаторе (0.9 балла)

Теперь рассмотрим движение жидкости в конденсаторе при наличии электромагнитного поля. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U , причём потенциал внутренней обкладки выше, чем потенциал внешней. Система помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленной противоположно оси z (т.е. $\vec{B} = -\vec{e}_z B$). Обе обкладки конденсатора закреплены и не могут вращаться.

При решении задачи используйте цилиндрическую систему координат с единичными ортами $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$, образующими правую тройку.

В установившемся режиме траектории элементов жидкости представляют собой окружности, перпендикулярные оси z , центры которых расположены на последней.

Описание данной части задачи также является описанием к частям E и F.



D1 0.30

Определите напряжённость электрического поля $\vec{E}(r)$ в области между цилиндрами на расстоянии r от их оси. Ответ выразите через U , R_1 , R_2 , r и $\vec{e}_r$.

D2^{0.20} Определите силу $\vec{f}_B$, действующую на единицу объёма жидкости со стороны магнитного поля. Ответ выразите через σ, U, r, B , скорость движения жидкости $v(r)$, $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$.

D3^{0.40} Из общефизических соображений укажите направление силы $\vec{f}_E$, действующей на единицу объёма жидкости со стороны электростатического поля. В качестве ответа укажите единичный вектор, коллинеарно которому направлена эта сила. Ответ обоснуйте.

Часть E. Течение при малых скоростях (2.0 балла)

Для начала рассмотрим случай течения жидкости при малых скоростях v , удовлетворяющих сильному неравенству:

$$v \ll \frac{E}{B}.$$

Данный вид движения реализуется в слабых магнитных полях.

E1^{1.60} Получите зависимость скорости движения жидкости $v(r)$ от расстояния r до оси цилиндров. Ответ выразите через $\sigma, \eta, U, B, R_1, R_2$ и r .

E2^{0.40} Пусть радиус внутренней обкладки равен R , а радиус внешней обкладки в несколько (порядка единицы) раз больше. Оцените максимальную величину индукции магнитного поля B_{max} , при которой полученные вами результаты ещё можно считать применимыми. Ответ выразите через σ, η, U и R .

Часть F. Течение в очень сильном магнитном поле (1.5 балла)

Пусть радиусы обкладок вновь равны R_1 и R_2 , а соотношение между ними может быть произвольным. Индукция магнитного поля, в которое помещён конденсатор, принимает очень большие значения в данной части задачи.

F1^{0.90} Получите зависимость $v(r)$ в случае сильного магнитного поля вдали от обкладок конденсатора. Ответ выразите через $\sigma, \eta, U, B, R_1, R_2$ и r .

F2^{0.60} Постройте качественный график зависимости $v(r)$ для всех значений r между обкладками конденсатора в случае сильного магнитного поля. Указывать характерные значения при построении графика не обязательно.