



С момента открытия Эйнштейном теории относительности человечество поставило перед собой задачу о достижении ракетами скоростей, близких к скорости света в вакууме.

Известные на данный момент технологии не позволяют добиться скоростей, требующий учёта релятивистских эффектов. Так, на данный момент наибольшая теоретически достижимая скорость ракеты, которой позволяют добиться существующие технологии, составляет примерно $0.1c$, чему соответствует релятивистский гамма-фактор $\gamma \approx 1.005$, поэтому динамика движения даже современных ракет с хорошей точностью описывается механикой Ньютона.

Теоретические же исследования, как известно, опережают технологический прогресс, и к данному моменту построено большое количество теоретических способов запуска релятивистских ракет. В рамках данной задачи вам предлагается ознакомиться с некоторыми особенностями динамики релятивистской ракеты.

Во всех пунктах задачи:

- двигатель ракеты устроен таким образом, что он перерабатывает накопленное в нём топливо в горючее вещество, вылетающее из двигателя в одном и том же направлении относительно ракеты;
- считайте, что энергия системы складывается только из кинетической энергии и энергии покоя, и что при взаимодействиях данные виды энергии переходят только друг в друга без выделения теплоты;
- считайте скорости релятивистскими.

Часть А. Классическая модель релятивистской ракеты (2.8 балла)

Рассмотрим покоящуюся в вакууме релятивистскую ракету массой M . Ракета приходит в движение, при котором горючее вылетает из двигателя со скоростью u относительно ракеты. Массу движущейся ракеты обозначим за m .

A1 ^{0.70} Чему равна скорость v ракеты в момент, когда её масса уменьшается до значения m ? Ответ выразите через m , M , c и u .

Пусть ракета движется таким образом, что её пассажиры испытывают постоянное ускорение свободного падения a . Двигатель ракеты прекращает работу через время τ , измеренное по часам ракеты.

A2 ^{0.30} Определите массу m ракеты к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через M , a , u , c и τ .

A3 ^{0.30} Найдите перемещение S ракеты к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через c , u , a и τ .

Рассмотрим ракету, для которой $u/c = 0.1$. Двигатель ракеты прекращает работу через время τ_0 , измеренное по часам ракеты. В процессе движения проводилось измерение массы ракеты m от времени τ , прошедшего по часам ракеты от момента старта. Данная зависимость представлена в таблице ниже в виде $y(x)$, где $y = m/M$, а $x = \tau/\tau_0$:

y	x	y	x	y	x
1.000	0.000	0.373	0.250	0.153	0.650
0.981	0.020	0.318	0.300	0.142	0.700
0.929	0.040	0.276	0.350	0.133	0.750
0.858	0.060	0.244	0.400	0.125	0.800
0.782	0.080	0.218	0.450	0.117	0.850
0.709	0.100	0.197	0.500	0.111	0.900
0.557	0.150	0.180	0.550	0.105	0.950
0.449	0.200	0.165	0.600	0.100	1.000

A4 ^{1.50} Как можно точнее определите перемещение S ракеты в лабораторной системе отсчёта к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через c и τ_0 . Приведите необходимые численные значения в таблице в листах ответов. При необходимости вы можете использовать миллиметровую бумагу в листах ответов для построения графиков.

Часть В. Двухкомпонентная струя (1.4 балла)

Рассмотрим покоящуюся в вакууме релятивистскую ракету массой M . Ракета приходит в движение, при котором струя горючего, вылетающего из ракеты, имеет две компоненты 1 и 2. Горючие вещества 1 и 2 вылетают из двигателя со скоростями u_1 и u_2 соответственно относительно ракеты, причём масса вылетающего в единицу времени вещества 2 в α раз больше вылетающего в единицу времени вещества 1. Во всех пунктах данной части задачи считайте известными величины M , c , u_1 , u_2 и α .

B1 ^{0.70} Пусть масса ракеты уменьшилась до значения m . Найдите массы m_1 и m_2 вылетевших из ракеты горючих веществ 1 и 2 соответственно. Ответ выразите через m и известные величины.

B2 ^{0.70} Найдите скорость v ракеты в момент, когда её масса уменьшилась до значения m . Ответ выразите через m и известные величины.

Часть С. Движение ракеты в веществе (1.8 балла)

Рассмотрим неподвижную ракету массой M , находящуюся в неподвижном веществе с постоянной плотностью ρ . Площадь поперечного сечения ракеты равна S . Ракету приводят в движение с помощью двигателя, испускающего горючее с постоянной скоростью u относительно ракеты в одном и том же направлении, перпендикулярном поперечному сечению S . Всё вещество, попавшее на переднее основание ракеты, проходит внутрь ракеты и превращается в топливо. Во всех пунктах данной части задачи считайте известными величины M , c , u , ρ и S .

- C10.50

Пусть двигатель ракеты выключен, а ракета движется со скоростью v . С какой скоростью $dm/d\tau$ по часам ракеты изменяется её масса? Ответ выразите через v и известные величины.
- C20.50

Пусть двигатель ракеты работает таким образом, что масса движущейся в вакууме ракеты изменяется со скоростью $dm_0/d\tau$ по часам ракеты в момент времени τ .
С какой скоростью $dm/d\tau$ по часам ракеты изменяется её масса в момент времени τ , если ракета движется со скоростью v , а двигатель ракеты работает так же, как и при движении в вакууме (т.е. в момент времени τ в единицу времени из ракеты вылетает та же масса горючего с той же скоростью)? Ответ выразите через $dm_0/d\tau$, v и известные величины.
- C30.80

Пусть двигатель ракеты включен, но работает неизвестным образом. Наблюдатель, находящийся на ракете, выяснил, что в некоторый момент времени масса ракеты равнялась m , скорость изменения массы ракеты по часам ракеты равнялась $dm/d\tau$, а ракета двигалась со скоростью v относительно лабораторной системы отсчёта. Какое ускорение свободного падения a испытывал в рассматриваемый момент пассажир? Ответ выразите через v , m , $dm/d\tau$ и известные величины.

Часть D. Ракета, использующая антивещество (1.5 балла)

Рассмотрим неподвижную ракету массой M , находящуюся в неподвижном веществе с постоянной плотностью ρ . Площадь поперечного сечения ракеты равна S .
Топливом двигателя ракеты является антивещество, которое аннигилирует с попавшим в ракету веществом, после чего из двигателя ракеты вылетают фотоны в направлении, перпендикулярном поперечному сечению ракеты. Массы аннигилирующих топлива ракеты и попавшего в неё вещества одинаковы.
Во всех пунктах данной части задачи считайте известными величины M , c , ρ и S .

- D10.50

Пусть ракета массой m движется со скоростью v . Определите ускорение свободного падения a , испытываемое пассажирами ракеты. Ответ выразите через m , v и известные величины.
- D20.70

Какой скорости v достигнет ракета к моменту, когда её масса уменьшится до значения m ? Ответ выразите m и известные величины.
- D30.30

Найдите перемещение L ракеты к моменту, когда её скорость достигает значения v . Ответ выразите через v и известные величины.

Часть E. Движение в веществе с малой плотностью (2.5 балла)

Рассмотрим изначально неподвижную ракету, движущуюся в вакууме. Пусть τ – время, прошедшее по часам ракеты с момента старта. Массовый расход вылетающего из ракеты горючего зависит от τ таким образом, что при движении ракеты в вакууме пассажиры испытывают постоянное ускорение свободного падения a . Когда двигатель ракеты прекратил работу, скорость ракеты оказалась равной v_1 .

Теперь рассмотрим движение ракеты с тем же двигателем (т.е. с той же зависимостью массового расхода вылетающего из ракеты горючего от τ , измеренного по часам ракеты, движущейся в веществе), но в среде с малой плотностью ρ . Поскольку плотность ρ является малой, зависимости $v(\tau)$ и $M(\tau)$, где τ – время, прошедшее по часам ракеты, можно представить в следующей форме:

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \delta v(\tau) \qquad m(\tau) = m_0(\tau) + \delta m(\tau).$$

Здесь $v_0(\tau)$ и $m_0(\tau)$ – зависимости скорости и массы ракеты соответственно от времени τ , прошедшего по часам ракеты при движении ракеты в вакууме. Считайте, что $\delta v(\tau) \ll v_0(\tau)$ и $\delta m(\tau) \ll m_0(\tau)$. Оба двигателя работают в течение одного и того же времени, измеренного часам соответствующих ракет. Во всех пунктах данной части задачи считайте известными величины M , ρ , S , c , u и a .

- E10.50

Получите зависимость $\delta m(\tau)$. Ответ выразите через τ и известные величины.
- E20.20

На какую величину δm_1 отличаются массы ракет, движущихся в вакууме и веществе к моменту окончания работы двигателей? Ответ выразите через v_1 и известные величины.
- E31.50

Получите зависимость $\delta v(\tau)$. Ответ выразите через τ и известные величины.
- E40.30

На какую величину δv_1 отличаются скорости ракет, движущихся в вакууме и веществе к моменту окончания работы двигателей? Ответ выразите через v_1 и известные величины.