

A1 ^{0.50} Определите дипольный момент гантели $\vec{p}$. Ответ выразите через $\vec{E}_0$, r , ε_0 и $\vec{l}$.

Поскольку шары и стержень являются металлическими – поверхность гантели является эквипотенциальной. Также, поскольку можно пренебречь наведёнными дипольными моментами шаров и стержня в силу $l \gg r$, можно считать, что заряды равномерно распределяются по поверхностям шаров 1 и 2. Данные заряды определяют дипольный момент $\vec{p}$ гантели. Отметим, что потенциалом электростатического поля одного из шаров на поверхности другого также можно пренебречь.
Поскольку гантель является электрически нейтральной:

$$q_2 = -q_1 = q.$$

Запишем условие эквипотенциальной поверхности гантели. Приравнивая разность потенциалов в центрах шаров 1 и 2 к нулю:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 -\vec{E}d\vec{l} = -(\vec{E}_0, \vec{l}) + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0,$$

откуда:

$$q = 2\pi\varepsilon_0 r (\vec{E}_0, \vec{l}).$$

Поскольку $\vec{p} = q\vec{l}$, имеем:

Ответ:

$$\vec{p} = 2\pi\varepsilon_0 r (\vec{E}_0, \vec{l}) \vec{l}.$$

A2 ^{0.20} Определите момент сил $\vec{M}$, действующих на гантель. Ответ выразите через $\vec{E}_0$, r , ε_0 , $\vec{l}$.

Для момента сил $\vec{M}$ имеем:

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}_0],$$

откуда:

Ответ:

$$\vec{M} = 2\pi\varepsilon_0 r (\vec{E}_0, \vec{l}) [\vec{l} \times \vec{E}_0].$$

A3 ^{0.20} Найдите положения равновесия системы. В качестве ответа укажите значения углов α_0 между стержнем и направлением напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$.

Положения равновесия гантели соответствуют равенству нулю момента сил $\vec{M}$, действующих на гантель со стороны электростатического поля. Момент сил $\vec{M}$ обнуляется в двух случаях: $\vec{l} \perp \vec{E}_0$ и $\vec{l} \parallel \vec{E}_0$. Это два положения равновесия системы.
Таким образом:

Ответ:

$$\alpha_0 = 0, \pi/2.$$

A4 ^{0.50} Какие из найденных вами в пункте **A3** положения равновесия являются устойчивыми, а какие – неустойчивыми? Ответ обоснуйте.
Найдите также периоды малых колебаний вблизи положений устойчивого равновесия. Ответы выразите через l , R , m , E_0 и ε_0 .

Если $\alpha = \angle \vec{E}_0, \vec{l}$, то выражение для момента сил примет вид:

$$\vec{M} = -2\pi\varepsilon_0 r E_0^2 l^2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \vec{n}.$$

Для малых отклонений относительно $\alpha_0 = 0$:

$$\vec{M}(\alpha) = -2\pi\varepsilon_0 r E_0^2 l^2 \alpha.$$

Таким образом, положение равновесия $\alpha_0 = 0$ является устойчивым.
Для малых отклонений относительно $\alpha_0 = \pi/2$:

$$2\pi\varepsilon_0 r E_0^2 l^2 \Delta \alpha.$$

Таким образом, положение равновесия $\alpha_0 = \pi/2$ является неустойчивым.

Ответ: Положение равновесия $\alpha_0 = 0$ является устойчивым, а $\alpha_0 = \pi/2$ – неустойчивым.

Для определения периода малых колебаний в положении устойчивого равновесия запишем основное уравнение динамики вращательного движения относительно центра стержня. Момент инерции гантели относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр, равен $I = 2 \cdot ml^2/4 = ml^2/2$, поэтому:

$$-2\pi\epsilon_0 r E_0^2 l^2 \alpha = \frac{ml^2 \ddot{\alpha}}{2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 r E_0^2}{m}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{4\pi\epsilon_0 r E_0^2}}.$$

A5 0.60 В устойчивом положении равновесия стержню мгновенно придали угловую скорость $\vec{\omega}_0$ перпендикулярную электрическому полю. При какой минимальной начальной угловой скорости ω_{min} гантель сможет совершить полный оборот? Ответ выразите через l, r, m, E_0 и ϵ_0 .

Первое решение:

Гантель является упругим диполем, поэтому её потенциальная энергия в электростатическом поле составляет:

$$W_p = -\frac{(\vec{p}, \vec{E}_0)}{2} = -\pi\epsilon_0 r (\vec{E}_0, \vec{l})^2.$$

Максимальное значение потенциальной энергии достигается в положении неустойчивого равновесия, поэтому условием оборота является прохождение положения неустойчивого равновесия. Из закона сохранения энергии имеем:

$$E_k = \frac{I\omega_{min}^2}{2} = \frac{ml^2\omega_{min}^2}{4} = -\Delta W_p = \pi\epsilon_0 r E_0^2 l^2,$$

откуда:

Ответ:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r E_0^2}{m}}.$$

Второе решение:

Из теоремы об изменении кинетической энергии получим:

$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{ml^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{4} = A_E,$$

где A_E – работа, совершённая над гантелью со стороны электростатического поля, для которой имеем:

$$A_E = \int_0^\alpha M(\alpha) d\alpha = -2\pi\epsilon_0 r E_0^2 l^2 \int_0^\alpha \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = -\pi\epsilon_0 r E_0^2 l^2 \sin^2 \alpha.$$

Минимальное значение угловой скорости соответствует $\alpha = \pi/2$, поэтому для полного оборота достаточно пройти положение неустойчивого равновесия. Имеем:

$$\frac{ml^2\omega_{min}^2}{4} = \pi\epsilon_0 r E_0^2 l^2,$$

откуда:

Ответ:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r E_0^2}{m}}.$$

B1 0.90 Запишите уравнение, определяющее силу тока I в стержне. Покажите, что сила тока в нашей системе равна силе тока в некотором RLC контуре, подключенном к генератору переменного гармонического напряжения $\mathcal{E}(t)$. Используя полученное уравнение, определите параметры эквивалентной схемы: зависимость от времени ЭДС эквивалентного генератора $\mathcal{E}_{eff}(t)$, индуктивность L_{eff} , ёмкость C_{eff} и сопротивление R_{eff} . Ответы выразите через $E_0, l, r, R, \epsilon_0, \omega, \theta$ и t .

Пусть φ_1 и φ_2 – потенциалы в центрах шаров 1 и 2 соответственно. Падение напряжения на стержне равно их разности, поэтому из закона Ома имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR.$$

С другой стороны, мы можем воспользоваться результатом пункта A1:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = (\vec{E}_0, \vec{l}) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Приравнивая, получим:

Ответ:

$$(\vec{E}_0, \vec{l}) = IR + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Уравнение, описывающее силу тока в колебательном RLC контуре, записывается следующим образом:

$$\mathcal{E}(t) = L_{eff} \dot{I} + IR_{eff} + \frac{q}{C_{eff}}$$

Сопоставляя коэффициенты, для L_{eff} , R_{eff} и C_{eff} находим:

Ответ:

$$L_{eff} = 0, \quad R_{eff} = R, \quad C_{eff} = 2\pi\epsilon_0 r.$$

Проекция напряжённости электростатического поля на плоскость вращения стержня равна $E_0 \cos \theta$. Тогда если φ – угол поворота стержня от начального положения, то для величины $(\vec{E}_0, \vec{l})(\varphi)$ имеем:

$$(\vec{E}_0, \vec{l})(\varphi) = E_0 l \cos \theta \cos \varphi.$$

Поскольку стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω :

$$\varphi = \omega t \Rightarrow (\vec{E}_0, \vec{l})(t) = E_0 l \cos \theta \cos \omega t.$$

Тогда для $\mathcal{E}_{eff}$ и ω_{eff} получим:

Ответ:

$$\mathcal{E}_{eff} = E_0 l \cos \theta \cos \omega t \quad f_{eff} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

B2 ^{0.50} Получите зависимость от времени t проекции $p_l(t)$ дипольного момента гантели на ось, направленную вдоль вектора $\vec{l}$. Ответ выразите через E_0 , l , r , R , ϵ_0 , ω , θ и t .

Величина $p_l(t)$ описывается выражением:

$$p_l = q(t)l,$$

где $q(t)$ – заряд шара 2 как функция времени.

Уравнение, описывающее зависимость заряда шара 2 от времени, выглядит следующим образом:

$$E_0 l \cos \theta \cos \omega t = R\dot{q} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Воспользуемся методом комплексных амплитуд. Пусть $q(t) = \Re(\hat{q}_0 e^{i\omega t})$. Тогда:

$$E_0 l \cos \theta = \hat{q}_0 \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} + i\omega R \right) \Rightarrow \hat{q}_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 r E_0 l \cos \theta e^{i\varphi_0}}{\sqrt{1 + (2\pi\epsilon_0 r R \omega)^2}},$$

где $\varphi_0 = -\arctg(2\pi\epsilon_0 r R \omega)$.

Таким образом:

Ответ:

$$p_l(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 r E_0 l^2 \cos \theta}{\sqrt{1 + (2\pi\epsilon_0 r R \omega)^2}} \cos(\omega t - \arctg(2\pi\epsilon_0 r R \omega)).$$

B3 ^{0.20} Упростите ваш ответ для $p_l(t)$, полученный в пункте B2, с учётом малости сопротивления R . Упрощённый ответ должен содержать только величины, порядок малости по R которых не превышает первый. Ответ выразите через E_0 , l , r , R , ϵ_0 , ω , θ и t .

Поскольку напряжение на резисторе всегда много меньше амплитуды эффективного напряжения источника, можно считать, что $2\pi\epsilon_0 r R \omega \ll 1$. Отсюда:

Ответ:

$$p_l(t) \approx 2\pi\epsilon_0 r E_0 l^2 \cos \theta \cos(\omega t - 2\pi\epsilon_0 r R \omega) \approx 2\pi\epsilon_0 r E_0 l^2 \cos \theta (\cos \omega t + 2\pi\epsilon_0 r R \omega \sin \omega t).$$

В4 1.00

Определите средние за большое время компоненты дипольного момент $\langle p_x \rangle$, $\langle p_y \rangle$ и $\langle p_z \rangle$ гантели. Ответы выразите через E_0 , l , r , R , ϵ_0 , ω и θ .

Определим проекции на координатные оси дипольного момента $\vec{p}$. В плоскости xz вектор $\vec{l}$ описывает эллипс с полуосями $a_x = l$ и $a_z = l \cos \theta$, а в плоскости xy – эллипс с полуосями $a_x = l$ и $a_y = l \sin \theta$. Отсюда получим:

$$p_x(t) = p_l(t) \sin \theta \cos \omega t \quad p_y(t) = p_l(t) \sin \omega t \quad p_z(t) = p_l(t) \cos \theta \cos \omega t.$$

Учтём, что $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ и $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$. Отсюда для $\langle p_x \rangle$ получим:

$$\langle p_x \rangle = 2\pi\epsilon_0 \sin \theta \cos \theta r E_0 l^2 \langle \cos^2 \omega t + 2\pi\epsilon_0 r R \omega \sin \omega t \cos \omega t \rangle,$$

откуда:

Ответ:

$$\langle p_x \rangle = \pi\epsilon_0 \sin \theta \cos \theta r E_0 l^2.$$

Аналогично для $\langle p_z \rangle$:

Ответ:

$$\langle p_z \rangle = \pi\epsilon_0 \cos^2 \theta r E_0 l^2.$$

Для $\langle p_y \rangle$ имеем:

$$\langle p_x \rangle = 2\pi\epsilon_0 \cos \theta r E_0 l^2 \langle \sin \omega t \cos \omega t + 2\pi\epsilon_0 r R \omega \sin^2 \omega t \rangle,$$

или же:

Ответ:

$$\langle p_y \rangle = 2\pi^2 \epsilon_0^2 \cos \theta r^2 E_0 l^2 \omega R.$$

С1 0.50

Найдите зависимость от времени t угловой скорости стержня $\omega(t)$, считая, что $\omega(t) \gg \omega_{min}$ в любой момент времени, а $t \gg 2\pi/\omega_0$. Ответ выразите через ω_0 , E_0 , l , r , R , ϵ_0 и t .

Поскольку $\omega \gg \omega_{min}$, угловую скорость в течение одного периода можно считать постоянной и равной средней по периоду.

Движение гантели будет являться плоским, поскольку момент сил $\vec{M}$ в любой момент перпендикулярен плоскости, содержащей стержень и направление напряжённости электростатического поля $\vec{E}_0$, а угол $\theta = 0$.

Из основного уравнения динамики вращательного движения относительно центра стержня получим:

$$\left\langle \frac{dL_x}{dt} \right\rangle = -\frac{ml^2}{2} \left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{ml^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = \langle M_x \rangle = \langle p_y \rangle E_0 = 2\pi^2 \epsilon_0^2 r^2 E_0^2 l^2 \omega R.$$

Отсюда:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 r^2 E_0^2 R dt}{m}.$$

Интегрируя, получим:

Ответ:

$$\omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 r^2 E_0^2 R t}{m}\right)$$

С2 0.30

Оцените время τ , через которое стержень перестанет делать полные обороты. Ответ выразите через ω_0 , E_0 , l , r , R и ϵ_0 .

Стержень перестанет делать полные обороты, когда угловая скорость стержня ω уменьшится до ω_{min} . По порядку величины время τ можно оценить с помощью зависимости для $\omega(t)$ из пункта C1.

Считая, что $\omega(\tau) = \omega_{min}$, получим:

$$\tau \approx \frac{m}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R} \ln \frac{\omega_0}{\omega_{min}},$$

или же:

Ответ:

$$\tau \approx \frac{m}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R} \ln \left(\omega_0 \sqrt{\frac{m}{4\pi \varepsilon_0 r E_0^2}} \right).$$

D1 0.50 Получите точное выражение для момента импульса $\vec{L}$ гантели в режиме регулярно прецессии. Ответ выразите через $m, l, \vec{\omega}'$ и $\vec{\Omega}$. Упростите ваш ответ с учётом $\Omega_z \ll \omega'$.

Введём декартову систему координат $x'y'z'$ таким образом, что координатные оси x' и y' направлены перпендикулярно стержню, а ось z' направлена вдоль стержня.

Выбранные координатные оси являются главными осями инерции для гантели, где $I_{x'} = I_{y'} = ml^2/2$, а $I_{z'} = 0$, поэтому момент импульса $\vec{L}$ гантели относительно её центра записывается следующим образом:

$$\vec{L} = \frac{ml^2(\omega_{x'}\vec{e}_{x'} + \omega_{y'}\vec{e}_{y'})}{2} = \frac{ml^2\vec{\omega}_{\perp}}{2}.$$

Здесь индекс $\perp$ означает "перпендикулярно стержню".

Для $\vec{\omega}_{\perp}$ с учётом того, что $\vec{\omega}'$ перпендикулярна стержню, а угол $\theta = const$, имеем:

$$\vec{\omega}_{\perp} = \vec{\omega}' \left(1 + \frac{(\vec{\omega}', \vec{\Omega})}{\omega'^2} \right).$$

Таким образом:

Ответ:

$$\vec{L} = \frac{ml^2\vec{\omega}'}{2} \left(1 + \frac{(\vec{\omega}', \vec{\Omega})}{\omega'^2} \right).$$

С учётом $\Omega_z \ll \omega'$ имеем:

Ответ:

$$\vec{L} \approx \frac{ml^2\vec{\omega}'}{2}.$$

D2 1.50 Покажите, что возможен такой режим движения гантели, при котором она в среднем испытывает регулярную прецессию вокруг оси z . Приведите все соответствующие уравнения движения, на основании которых вы производите доказательство.

Определите для данного режима движения среднюю угловую скорость прецессии плоскости движения стержня Ω_z . Ответ выразите через $E_0, \varepsilon_0, m, l, r, R, \omega'$ и θ . Также выразите ответ через ω_{min}, ω' и θ и убедитесь, что $\Omega_z \ll \omega'$.

Если в процессе движения гантели угол θ в среднем остаётся постоянным, то вектор угловой скорости вращения гантели в каждый момент можно считать направленным в плоскости xz . Тогда и момент импульса $\vec{L}$ гантели относительно центра стержня может быть направлен только в плоскости xz .

Компоненты момента сил, действующих на гантель со стороны электростатического поля, составляют:

$$M_x = p_y E_0 \quad M_y = -p_x E_0 \quad M_z = 0,$$

поскольку $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_z$.

Проводя усреднение по времени, получим:

$$\langle M_x \rangle = \langle p_y \rangle E_0 = 0,$$

поскольку для металлического стержня $R = 0$, а значит и $\langle p_y \rangle = 0$.

Для $\langle M_y \rangle$ имеем:

$$\langle M_y \rangle = -\langle p_x \rangle E_0 = -\pi \varepsilon_0 r \sin \theta \cos \theta E_0^2 l^2.$$

Таким образом, в любой момент времени $\langle \vec{M} \rangle \perp \vec{L}$, откуда следует, что величина момента импульса L будет оставаться постоянной.

Также, поскольку $M_z = 0$ в любой момент времени, проекция L_z момента импульса на ось z также остаётся постоянной. Из условий $L = const$ и $L_z = const$ в сочетании с тем, что $L_y = 0$, следует, что $L_x = const$.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для стержня в проекции на ось y :

$$\left\langle \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_y \right\rangle = \Omega_z L_x = \langle M_y \rangle = -\pi \varepsilon_0 r \sin \theta \cos \theta E_0^2 l^2.$$

Поскольку величины θ и L_x являются постоянными – величина Ω_z также является постоянной.

Определим проекцию момента импульса L_x на ось x :

$$L_x = \frac{ml^2 \omega'_x}{2} = -\frac{ml^2 \omega' \cos \theta}{2}.$$

Подставляя в основное уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось y , получим:

$$-\frac{ml^2 \Omega_z \omega' \cos \theta}{2} = -\pi \varepsilon_0 r \sin \theta \cos \theta E_0^2 l^2.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\Omega_z = \frac{2\pi \varepsilon_0 r E_0^2 \sin \theta}{m \omega'} = \frac{\omega_{min}^2 \sin \theta}{2 \omega'}.$$

Ответ: Поскольку $\omega_{min} \ll \omega'$, условие $\Omega_z \ll \omega'$ также является выполненным.

D3 0.50

Чему равна установившаяся угловая скорость вращения стержня ω_∞ спустя большой промежуток времени? Ответ выразите через ω_0 и θ_0 .

Из-за наличия в системе диссипации энергии гантель спустя большое время будет двигаться таким образом, чтобы в стержне перестал течь электрический ток. Это возможно, если гантель будет двигаться в положении, соответствующем $\theta = \pi/2$.

При этом в переходном процессе компонента момента импульса L_z остаётся постоянной. В момент запуска гантели имеем:

$$L_z = \frac{ml^2 \omega_0 \sin \theta_0}{2}.$$

Поскольку в установившемся режиме $\theta = \pi/2 = \text{const}$, имеем:

$$L_z = \frac{ml^2 \omega_\infty}{2}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\omega_\infty = \omega_0 \sin \theta_0.$$

D4 0.50

Получите зависимость средней угловой прецессии Ω_z от угла θ . Ответ выразите через ω_{min} , ω_0 , θ_0 и θ .

При наличии сопротивления R стержня средний за один оборот момент сил $\langle \vec{M} \rangle$ имеет следующие компоненты:

$$\langle M_x \rangle = \langle p_y \rangle E_0 = 2\pi^2 \varepsilon_0^2 \cos \theta r^2 E_0^2 l^2 \omega R \quad \langle M_y \rangle = -\pi \varepsilon_0 \cos^2 \theta r E_0^2 l^2 \quad \langle M_z \rangle = 0.$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось y :

$$L_x \Omega_z + \frac{ml^2 \ddot{\theta}}{2} = \langle M_y \rangle.$$

Из приближений, описанных в условии задачи, следует, что величина $\ddot{\theta} \approx 0$, поскольку в течение одного периода вращения стержня в своей плоскости величина $\dot{\theta}$ может считаться постоянной.

Таким образом:

$$\Omega_z = \frac{\langle M_y \rangle}{L_x} = \frac{\omega_{min}^2 \sin \theta}{2 \omega'}$$

В процессе движения величина ω'_z остаётся постоянной и равной:

$$\omega'_z = \omega \sin \theta = \omega_0 \sin \theta_0.$$

Таким образом:

$$\omega'(\theta) = \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{\sin \theta},$$

откуда:

Ответ:

$$\Omega_z(\theta) = \frac{\omega_{min}^2 \sin^2 \theta}{2\omega_0 \sin \theta_0}.$$

D5 1.00

Получите зависимость от времени t величины θ при $t \gg 2\pi/\omega_0$. Ответ выразите через $\theta_0, E_0, m, r, R, \varepsilon_0$ и t .

Запишем уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось x :

$$\langle M_x \rangle = \dot{L}_x - \Omega_z L_y.$$

Поскольку величина Ω_z на два порядка меньше величины ω – вклад второго слагаемого является пренебрежимо малым. Таким образом:

$$\langle M_x \rangle = 2\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 l^2 R \omega \cos \theta = -2\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 l^2 R \omega_x = \frac{ml^2 \dot{\omega}_x}{2}.$$

Интегрируя полученное выражение, получим:

$$\omega_x(t) = -\omega_0 \cos \theta_0 \exp\left(-\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R t}{m}\right)$$

При этом:

$$\omega_x = -\omega' \cos \theta = -\frac{\omega_0 \sin \theta_0}{\operatorname{tg} \theta},$$

откуда после подстановки $\omega_x(t)$ имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \exp\left(\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R t}{m}\right).$$

Окончательно для $\theta(t)$ находим:

Ответ:

$$\theta(t) = \arctg\left(\operatorname{tg} \theta_0 \exp\left(\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R t}{m}\right)\right).$$

D6 0.40

Определите максимальное значение величины $\dot{\theta}$. Ответ выразите через θ_0, E_0, m, r, R и ε_0 . Убедитесь, что $\dot{\theta}_{max} \ll \omega_0$.

Представим $\operatorname{tg} \theta(t)$ в следующей форме:

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \operatorname{tg} \theta_0 e^{At} \quad A = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R}{m}.$$

Дифференцируя по времени:

$$\dot{\theta} = \frac{A \operatorname{tg} \theta_0 e^{At}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 e^{2At}}.$$

Максимум данного выражения достигается при $\operatorname{tg} \theta_0 e^{At} = 1$. Однако, если $\theta_0 > \pi/4$, условию максимума соответствует $t < 0$, что невозможно. Тогда максимальная величина $\dot{\theta}$ достигается при $\theta = \theta_0$.

Таким образом:

Ответ:

$$\dot{\theta}_{max} = \begin{cases} \frac{2\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R}{m} & \text{при } \theta_0 \leq \pi/4 \\ \frac{2\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R \sin 2\theta_0}{m} & \text{при } \theta_0 > \pi/4 \end{cases}$$

Ответ: Величина $\dot{\theta}_{max} \sim r^2 R$, т.е. является крайне малой по сравнению с ω .

D7 0.20

Найдите зависимость скорости прецессии от времени $\Omega(t)$. Ответ выразите через $E_0, \omega_0, m, r, R, \varepsilon_0, \theta_0$ и t .

Перепишем выражение для $\Omega_z(\theta)$:

$$\Omega_z(\theta) = \frac{\omega_{min}^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2\omega_0 \sin \theta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}.$$

Подставляя зависимость $\operatorname{tg} \theta(t)$, находим:

Ответ:

$$\Omega_z(t) = \frac{\pi \varepsilon_0 r E_0^2 \sin 2\theta_0}{m\omega_0 \left(\operatorname{tg}^2 \theta_0 + \exp \left(-\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2 E_0^2 R t}{m} \right) \right)}$$