

**A1<sup>0.30</sup>** Пусть  $\vec{v}$  – скорость жидкости в некоторой точке пространства. Чему равна плотность тока  $\vec{j}$  в данной точке пространства? Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ .

Со стороны электромагнитного поля на заряд, движущийся со скоростью  $\vec{u}$ , действует сила  $\vec{F}_{EM}$ , равная:

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

Поскольку скорость движения заряда относительно жидкости является малой:

$$\vec{u} \approx \vec{v}.$$

Таким образом:

$$\vec{F}_{EM} \approx q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

В установившемся режиме:

$$\vec{F}_{EM} + \langle \vec{F} \rangle = 0,$$

где  $\vec{F}$  – сила, действующая на заряд  $q$  со стороны кристаллической решётки.

Тогда для плотности тока  $\vec{j}$  находим:

Ответ:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

**A2<sup>0.20</sup>** Определите силу  $\vec{f}_B$ , действующих на единицу объёма жидкости со стороны магнитного поля. Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ .

Сила Ампера, действующая на элемент проводника объёмом  $dV$  с током плотностью  $\vec{j}$  составляет:

$$d\vec{F}_A = [\vec{j} \times \vec{B}]dV.$$

Таким образом:

$$\vec{f}_B = [\vec{j} \times \vec{B}].$$

Подставляя выражение для  $\vec{j}$ , находим:

Ответ:

$$\vec{f}_B = \sigma([\vec{E} \times \vec{B}] - [\vec{B} \times [\vec{v} \times \vec{B}]])$$

**A3<sup>0.30</sup>** Покажите, что если объёмная плотность свободного заряда в любой точке жидкости равна нулю, то и объёмная плотность полного заряда также равна нулю в любой точке жидкости.

Объёмная плотность свободного заряда  $\rho_{св}$  определяется выражением:

$$\rho_{св} = (\nabla, \vec{D}),$$

где  $\vec{D}$  – вектор электростатической индукции.

Таким образом:

$$(\nabla, \vec{D}) = 0.$$

В линейном однородном диэлектрике выполняется соотношение:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Из последнего соотношения следует:

$$(\nabla, \vec{E}) = \frac{(\nabla, \vec{D})}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 0.$$

С другой стороны:

$$\rho = \varepsilon_0 (\nabla, \vec{E}) = 0,$$

что и требовалось показать.

**B1<sup>0.30</sup>** Из общефизических соображений найдите, чему равна сила  $\vec{f}_E$ , действующая на единицу объёма жидкости со стороны электростатического поля? Ответ обоснуйте.

Из результатов пункте А3 следует, что объёмная плотность поляризационных зарядов равно нулю в любой точке жидкости. Это означает, взаимодействие объёма жидкости с электростатическим полем обусловлено только тем, что вещество жидкости поляризовано. Сила, действующая на точечный диполь в неоднородном электростатическом поле, равняется:

$$\vec{F} = (\vec{p}, \nabla) \vec{E}.$$

Поскольку напряжённость электростатического поля внутри жидкости является постоянной, значит и напряжённость электростатического поля, действующего на поляризованный объём жидкости, также является постоянной. Значит, в каждой точке жидкости сила  $\vec{f}_E$  равна нулю.

Ответ:

$$\vec{f}_E = 0.$$

**В2<sup>1.00</sup>** Покажите, что зависимость скорости жидкости от координаты  $x$  можно представить в виде:

$$v(x) = A \cosh \omega x + B \sinh \omega x + C.$$

Определите  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $\omega$ . Ответы выразите через  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $U$ ,  $B$  и  $d$ .

Для силы  $\vec{f}_B$  имеем:

$$\vec{f}_B = \sigma \left( [\vec{E} \times \vec{B}] - \vec{v} B^2 + \vec{B}(\vec{v}, \vec{B}) \right) = \sigma \left( \frac{UB}{d} - v B^2 \right) \vec{e}_z.$$

Выделим прямоугольный параллелепипед длиной  $l$  высотой  $dx$  и запишем его условие стационарного движения:

$$dF_z = \eta l L \left( \frac{dv(x+dx)}{dx} - \frac{dv(x)}{dx} \right) + f_{Bz} l L dx = l L dz \left( \eta \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\sigma U B}{d} - \sigma B^2 v \right) = 0,$$

откуда:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\sigma B^2 v}{\eta} - \frac{\sigma U B}{\eta d}.$$

Вводя величину  $u = v - U/(Bd)$ , получим:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\sigma B^2 u}{\eta} \Rightarrow u(x) = A \cosh \left( Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right) + B \sinh \left( Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right).$$

Таким образом:

$$v(x) = A \cosh \left( Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right) + B \sinh \left( Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right) + \frac{U}{Bd}.$$

Мы привели зависимость  $v(x)$  к виду, предлагаемому в условии задачи. Для определения постоянных  $A$  и  $B$  воспользуемся граничными условиями на поверхностях обкладок:

$$v(\pm d/2) = 0 \Rightarrow B = 0, A = -\frac{U}{Bd \cosh \left( \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right)}.$$

Таким образом:

$$v(x) = \frac{U}{Bd} \left( 1 - \frac{\cosh \left( Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right)}{\cosh \left( \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right)} \right).$$

Ответ:

$$A = -\frac{U}{Bd \cosh \left( \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right)} \quad B = 0 \quad C = \frac{U}{Bd} \quad \omega = B \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}.$$

**В3<sup>0.20</sup>** Определите максимальную скорость течения жидкости  $v_{max}$ . Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $U$ ,  $B$  и  $d$ .

Обратим внимание, что максимальное значение  $v(x)$  достигается при  $\cosh \omega x = 1$ , т.е при  $x = 0$ . При любом значении  $B$  имеем:

Ответ:

$$v(x) = \frac{U}{Bd} \left( 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)} \right).$$

**B4<sup>0.40</sup>** Получите зависимость  $v(x)$  для случая слабого магнитного поля ( $Bd \ll \sqrt{\sigma/\eta}$ ). Определите максимальное значение скорости  $v_{max}$ . Ответы выразите через  $\sigma, \eta, U, B, d$  и  $x$ .

Постройте качественный график полученной зависимости  $v(x)$ . Отметьте на графике все важные точки.

При малых значениях  $z$  справедливо приближение:

$$\cosh z \approx 1 + \frac{z^2}{2}.$$

Таким образом:

$$v(x) \approx \frac{U}{Bd} \left( 1 - \frac{1 + \left(Bx \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)^2 / 2}{1 + \left(\frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)^2 / 2} \right),$$

откуда:

Ответ:

$$v(x) \approx \frac{\sigma UB}{2\eta d} \left( \frac{d^2}{4} - x^2 \right)$$

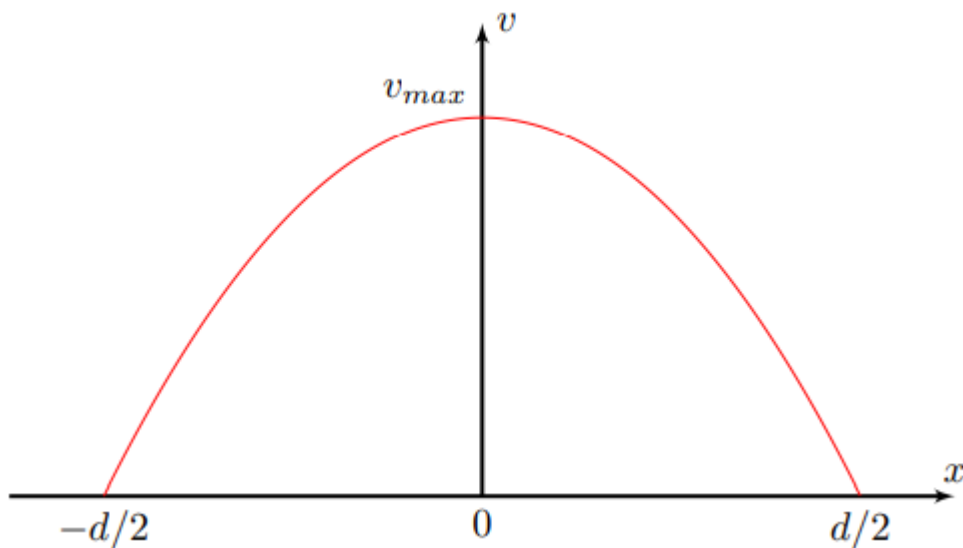
Для  $v_{max}$  при  $x = 0$  имеем:

Ответ:

$$v_{max} \approx \frac{\sigma UBd}{8\eta}.$$

График зависимости  $v(x)$  приведён на рисунке ниже:

Ответ:



**B5<sup>0.30</sup>** Определите максимальное значение скорости жидкости  $v_{max}$  для случая сильного магнитного поля ( $Bd \gg \sqrt{\sigma/\eta}$ ). Ответ выразите через  $\sigma, \eta, U, B$  и  $d$ .

Постройте качественный график зависимости  $v(x)$  для случая сильного магнитного поля. Отметьте на графике все важные точки.

Обратим внимание, что

$$\cosh\left(\frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right) \gg 1.$$

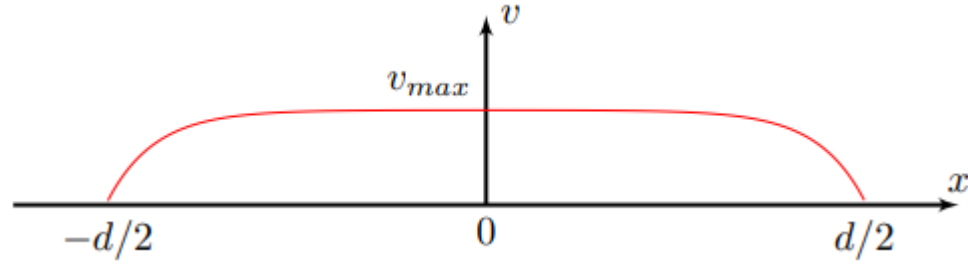
Таким образом:

Ответ:

$$v_{max} \approx \frac{U}{Bd}.$$

Практически во всей области скорость жидкости можно считать постоянной, поскольку функция  $\cosh x$  очень быстро возрастает при  $x \gg 1$ . Скорость жидкости достигает практически максимального значения на расстояниях до обкладок, малых по сравнению с  $d/2$ . С учётом этого, качественный график зависимости  $v(x)$  приведён на рисунке ниже:

Ответ:



B6<sup>0.30</sup>

Получите зависимость массового расхода жидкости  $Q$  через поперечное сечение  $xy$  конденсатора. Ответ выразите через  $\rho, \sigma, \eta, U, B, d$  и  $L$ .

Для массового расхода  $Q$  через аксиальное поперечное сечение имеем:

$$\begin{aligned} Q &= \rho L \int_{-d/2}^{d/2} v(x) dx = \frac{\rho UL}{Bd} \int_{-d/2}^{d/2} \left( 1 - \frac{\cosh\left(Bx\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)}{\cosh\left(\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)} \right) dx = \\ &= \frac{\rho UL}{Bd} \left( d - \frac{2}{B} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{\sinh\left(\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)}{\cosh\left(\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)} \right), \end{aligned}$$

или же:

Ответ:

$$Q = \frac{\rho UL}{B} \left( 1 - \frac{\tanh\left(\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right)}{\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}} \right)$$

B7<sup>0.40</sup>

Получите приближения для  $Q(B)$  в случаях слабого и сильного магнитного полей ( $Bd \ll \sqrt{\sigma/\eta}$  и  $Bd \gg \sqrt{\sigma/\eta}$  соответственно). Ответы выразите через  $\rho, \sigma, \eta, U, B, d$  и  $L$ .

Рассмотрим случай слабого магнитного поля.

Введём величину  $x$ :

$$x = \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}.$$

При  $x \rightarrow 0$  разложение функции  $\tanh x$  имеет вид:

$$\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}.$$

Тогда имеем:

$$1 - \frac{\tanh x}{x} \approx \frac{x^2}{3}.$$

Тогда в случае слабого магнитного поля зависимость  $Q(B)$  имеет вид:

Ответ:

$$Q(B) \approx \frac{\rho \sigma U B d^2 L}{12 \eta}$$

В случае сильного магнитного поля  $\tanh x/x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .  
Таким образом, в случае сильного магнитного поля зависимость  $Q(B)$  имеет вид:

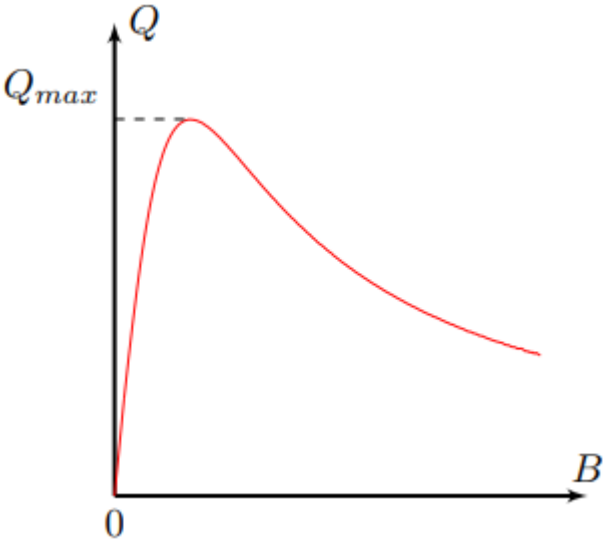
Ответ:

$$Q(B) \approx \frac{\rho UL}{B}.$$

**B8**<sup>0.40</sup> Постройте качественный график зависимости массового расхода  $Q$  от индукции магнитного поля  $B$ . Отметьте на графике все важные точки.

Качественный график зависимости  $Q(B)$ , полученной в пункте B5, приведён на рисунке ниже.

Ответ:



**C1**<sup>1.30</sup> Определите проекции на ось  $z$  моментов сил  $M_1$  и  $M_2$ , прикладываемых к внутренней и внешней обкладкам соответственно сторонними силами для поддержания их стационарного движения. Ответ выразите через  $\eta$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $h$ .

Рассмотрим цилиндр радиусом  $r$ . При стационарном движении проекция на ось  $z$  момента сил вязкого трения, действующих на него со стороны внешнего слоя жидкости, не зависит от  $r$ . При этом необходимо правильно интерпретировать закон вязкости Ньютона, утверждающий, что касательное напряжение в вязкой жидкости прямо пропорционально скорости деформации сдвига:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

Введём систему координат  $OXY$  так, как показано на рисунке. Тогда проекции  $v_x$  и  $v_y$  скорости точки с координатами  $(x,y)$  определяются выражениями:

$$v_x = -\omega(r)y \quad v_y = \omega(r)x.$$

Если рассматривать точку  $A$ , для которой  $x = r$ , а  $y = 0$ :

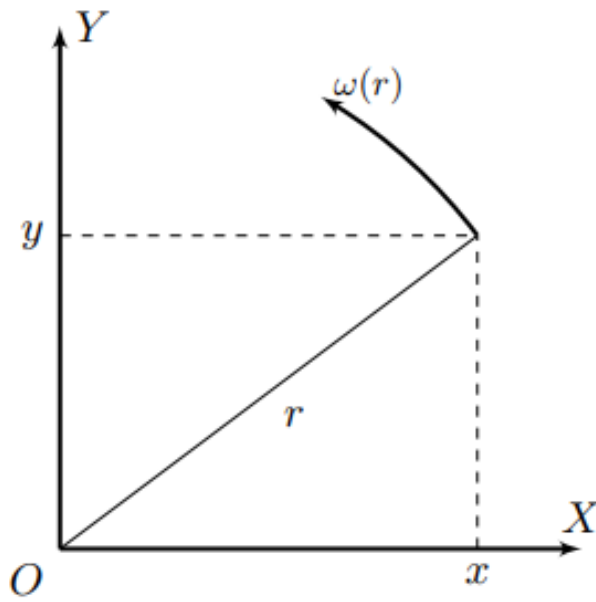
$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\omega(r) - y \frac{\partial \omega(r)}{\partial y} = -\omega(r) - y \frac{d\omega(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\omega(r). \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \omega(r) + x \frac{\partial \omega(r)}{\partial x} = \omega(r) + x \frac{d\omega(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \omega(r) + r \frac{d\omega(r)}{dr}. \end{aligned}$$

Таким образом, для касательного напряжения  $\tau_\varphi$  получаем:

$$\tau_\varphi = \eta r \frac{d\omega}{dr}.$$



Запишем выражение для момента сил вязкого трения  $M_z$ , действующих со стороны внешнего слоя на внутренний:

$$M_z = r \cdot 2\pi r h \tau_\varphi = 2\pi\eta h r^3 \frac{d\omega}{dr} = \text{const}$$

Интегрируя от поверхности внутреннего цилиндра, получим:

$$\omega(r) - \omega_1 = \frac{M_z}{2\pi\eta h} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^3} = \frac{M_z}{4\pi\eta h} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Из условия  $\omega(R_2) = \omega_2$  получим:

$$\frac{M_z}{4\pi\eta h} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

При этом  $M_2 = M_z$ , а  $M_1 = -M_z$ , поэтому имеем:

Ответ:

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta h R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}, \quad M_2 = \frac{4\pi\eta h R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

*Примечание:* Отметим, что данное выражение не зависит от выбора системы отсчёта. В поступательно движущейся системе отсчёта данное утверждение является очевидным.

Если же рассматривать движение жидкости в системе отсчёта, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , начало которой движется со скоростью  $\vec{v}_0$ , для относительной скорости имеем:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - [\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\text{отн}}] - \vec{v}_0$$

Тогда для  $v_{\text{отн}(x)}$  и  $v_{\text{отн}(y)}$  имеем:

$$v_{\text{отн}(x)} = v_x - \Omega_z y_{\text{отн}} + \Omega_y z_{\text{отн}} - v_{0x}.$$

$$v_{\text{отн}(y)} = v_y + \Omega_z x_{\text{отн}} - \Omega_x z_{\text{отн}} - v_{0y}.$$

Таким образом:

$$\frac{\partial v_{\text{отн}(x)}}{\partial y_{\text{отн}}} + \frac{\partial v_{\text{отн}(y)}}{\partial x_{\text{отн}}} = \frac{\partial v_x}{\partial y_{\text{отн}}} + \frac{\partial v_y}{\partial x_{\text{отн}}}$$

При этом в фиксированный момент времени  $d\vec{r} = d\vec{r}_{\text{отн}}$ , поэтому:

$$\frac{\partial v_{\text{отн}(x)}}{\partial y_{\text{отн}}} + \frac{\partial v_{\text{отн}(y)}}{\partial x_{\text{отн}}} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

В данной задаче наиболее удобно проводить дифференцирование во вращающейся системе отсчёта, в которой рассматриваемый элемент жидкости покоится. В данной системе отсчёта только одна из компонент скорости деформации сдвига не обращается в ноль, поэтому можно записать:

$$M_z = r F_\tau = r \cdot 2\pi r h \cdot \eta \cdot \frac{dv_{\text{отн}(\tau)}}{dr} = \text{const},$$

где  $v_{\text{отн}}$  – относительная скорость слоёв жидкости.

Если  $\omega(r_0)$  – угловая скорость вращения жидкости на расстоянии  $r_0$  от оси цилиндра, имеем:

$$v(r) = \omega(r)r \Rightarrow v_{\text{отн}}(r) = v(r) - \omega(r_0)r.$$

Дифференцируя:

$$\frac{dv_{\text{отн}}(r)}{dr} = \omega(r) + r \frac{d\omega(r)}{dr} - \omega(r_0).$$

При  $r = r_0$  получаем:

$$\frac{dv_{\text{отн}}}{dr} = r \frac{d\omega}{dr}.$$

Таким образом:

$$M_z = 2\pi\eta\hbar r^3 \frac{d\omega}{dr} = \text{const.}$$

C2 0.20

Получите зависимость скорости движения жидкости  $v(r)$  от расстояния  $r$  до оси цилиндров. Ответ выразите через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $r$ .

Подставляя выражение для  $M_z$  в выражение для  $\omega(r)$ , получим:

$$\omega(r) = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r^2}.$$

Поскольку  $v(r) = \omega(r)r$ , имеем:

Ответ:

$$v(r) = \frac{(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) r}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r}.$$

D1 0.30

Определите напряжённость электрического поля  $\vec{E}(r)$  в области между цилиндрами на расстоянии  $r$  от их оси. Ответ выразите через  $U$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $r$  и  $\vec{e}_r$ .

Напряжённость электростатического поля внутри жидкости имеет вид:

$$\vec{E} = \frac{A \vec{e}_r}{r}.$$

Тогда для напряжения  $U$  имеем:

$$U = A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = A \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\vec{E} = \frac{U \vec{e}_r}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

D2 0.20

Определите силу  $\vec{f}_B$ , действующую на единицу объёма жидкости со стороны магнитного поля. Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $U$ ,  $r$ ,  $B$ , скорость движения жидкости  $v(r)$ ,  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$ .

Воспользуемся выражением, полученным в пункте A2:

$$\vec{f}_B = \sigma([\vec{E} \times \vec{B}] - [\vec{B} \times [\vec{v} \times \vec{B}]]).$$

Поскольку  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , получим:

$$\vec{f}_B = \sigma([\vec{E} \times \vec{B}] - B^2 \vec{v}).$$

Поскольку  $\vec{B} = -\vec{e}_z B$ , получим:

Ответ:

$$\vec{f}_B = \sigma \left( \frac{UB}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} - B^2 v_\varphi \right) \vec{e}_\varphi.$$

D3 0.40

Из общефизических соображений укажите направление силы  $\vec{f}_E$ , действующей на единицу объёма жидкости со стороны электростатического поля. В качестве ответа укажите единичный вектор, коллинеарно которому направлена эта сила. Ответ обоснуйте.

Сила  $\vec{f}_E$ , действующая на единицу объёма жидкости, определяется выражением:

$$\vec{f}_E = (\vec{P}, \nabla) \vec{E}_{\text{ост}},$$

где  $\vec{E}_{\text{ост}}$  – напряжённость электростатического поля, действующего на выделенный объём жидкости. При этом  $\vec{E}_{\text{ост}} \sim \vec{E}$ , поэтому можно записать:

$$\vec{f}_E \sim (\vec{P}, \nabla) \vec{E}.$$

Также  $\vec{P} \sim \vec{E}$ , поэтому мы также можем записать:

$$\vec{f}_E \sim (\vec{E}, \nabla) \vec{E}.$$

Поскольку  $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$ , имеем:

$$\vec{f}_E \sim E_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = E_r \frac{dE_r}{dr} \vec{e}_r.$$

Таким образом:

Ответ: Векторы  $\vec{f}_E$  и  $\vec{e}_r$  – коллинеарные.

E1 1.60

Получите зависимость скорости движения жидкости  $v(r)$  от расстояния  $r$  до оси цилиндров. Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $U$ ,  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $r$ .

Ограничение, накладываемое на скорости движения жидкости, позволяет записать выражение для  $\vec{f}_B$  следующим образом:

$$\vec{f}_B \approx \sigma [\vec{E} \times \vec{B}].$$

Рассмотрим равновесие жидкости между внутренней обкладкой конденсатора и цилиндром радиусом  $r$ . Пусть со стороны жидкости на внутреннюю обкладку конденсатора относительно оси  $z$  действует момент сил, равный  $M_1$ . Тогда из закона сохранения момента импульса относительно оси  $z$  имеем:

$$M(r) - M_1 + M_{EM}(r) = 0,$$

где  $M(r)$  и  $M_{EM}(r)$  – моменты сил, действующих со стороны внешнего слоя жидкости радиусом  $r$  и электромагнитного поля соответственно на выделенный объём жидкости.

При этом:

$$M(r) = 2\pi\eta hr^3 \frac{d\omega}{dr}.$$

Определим  $M_{EM}$ :

$$M_{EM}(r) = \int_V (f_{B\varphi} + f_{E\varphi}) r dV = \int_V \sigma E B r dV = \frac{2\pi h \sigma U B}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \int_{R_1}^r r dr = \frac{\pi h \sigma U B (r^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Таким образом:

$$2\pi\eta hr^3 \frac{d\omega}{dr} = M_1 - \frac{\pi \sigma U B h (r^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Интегрируя от внутренней обкладки конденсатора, получим:

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \int_{R_1}^r \frac{M_1 dr}{2\pi\eta hr^3} - \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \int_{R_1}^r \left( \frac{1}{r} - \frac{R_1^2}{r^3} \right) dr = \\ &= \frac{M_1}{4\pi\eta h} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \ln \frac{r}{R_1} - \frac{R_1^2}{2} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Из условия  $\omega(R_2) = 0$  получим:

$$\frac{M_1}{4\pi\eta h} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \right).$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}\omega(r) &= \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \left( \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^2}{2} \right) \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \ln \frac{r}{R_1} \right) = \\ &= \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \ln \frac{r}{R_1} \right).\end{aligned}$$

Поскольку  $v = \omega(r)r$ , получим:

Ответ:

$$v(r) = \frac{\sigma U B}{2\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{r}{R_1^2} - \frac{1}{r} \right) - r \ln \frac{r}{R_1} \right).$$

**E2<sup>0.40</sup>** Пусть радиус внутренней обкладки равен  $R$ , а радиус внешней обкладки в несколько (порядка единицы) раз больше. Оцените максимальную величину индукции магнитного поля  $B_{max}$ , при которой полученные вами результаты ещё можно считать применимыми. Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $U$  и  $R$ .

Результаты начнут искажаться тогда, когда величины  $vB_{max}$  и  $E$  оказываются сопоставимыми по величине, поэтому можно записать:

$$E \approx vB_{max}.$$

При этом внутри конденсатора:

$$E \sim \frac{U}{R} \quad v \sim \frac{\sigma U B R}{\eta}.$$

Подставляя величины  $E$  и  $v$ , получим:

$$\frac{U}{R} \approx \frac{\sigma U B_{max}^2 R}{\eta},$$

откуда:

Ответ:

$$B_{max} \approx \sqrt{\frac{\eta}{\sigma R^2}}.$$

**F1<sup>0.90</sup>** Получите зависимость  $v(r)$  в случае сильного магнитного поля вдали от обкладок конденсатора. Ответ выразите через  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $U$ ,  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $r$ .

Рассмотрим выражение для силы  $\vec{f}_B$ :

$$\vec{f}_B = \sigma(E - vB)B\vec{e}_\varphi.$$

В силу очень большой величины индукции магнитного поля скорости движения элементов жидкости будут являться очень малыми. Это значит, что и величина силы  $f_B$  должна быть мала, поскольку её момент уравнивает момент сил вязкого трения, действующих на элементы жидкости. Поскольку величина  $B$  является большой, малость величины силы  $f_B$  возможна только при условии малости плотности тока  $j$ , а значит величины  $(E - vB)$ . Таким образом, вдали от обкладок конденсатора можно записать:

$$E(r) \approx v(r)B.$$

Подставляя  $E(r)$ , получим:

Ответ:

$$v(r) \approx \frac{U}{rB \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

**F2<sup>0.60</sup>** Постройте качественный график зависимости  $v(r)$  для всех значений  $r$  между обкладками конденсатора в случае сильного магнитного поля. Указывать характерные значения при построении графика не обязательно.

Вблизи обкладок конденсатора вид зависимости  $v(r)$  должен быть похож на полученный нами в процессе решения части В. Это означает, что вблизи обкладок конденсатора вид функции  $v(r)$  таков, что она выпукла вверх. Поскольку вдали от обкладок конденсатора  $v \sim 1/r$ , функция  $v(r)$  должна иметь максимум, причём ровно один, после чего она переходит в форму,

Соответствующий график функции  $v(r)$  приведён на рисунке ниже:

Примечание: Получим точное уравнение, описывающее зависимость  $v(r)$ .

$$dM_z = 2\pi\eta h d \left( r^3 \frac{d\omega}{dr} \right) + r \cdot 2\pi r dr h \cdot f_B = 0.$$
$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{rv' - v}{r^2},$$
$$\frac{d}{dr}(r^2 v' - rv) = -\frac{r^2 f_B}{\eta} = -\frac{\sigma r^2 EB}{\eta} + \frac{\sigma r^2 B^2 v}{\eta} = -\frac{\sigma U B r}{\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\sigma B^2 r^2 v}{\eta}.$$
$$2rv' + r^2v'' - rv' - v = -\frac{\sigma U Br}{\eta \ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\sigma B^2 r^2 v}{\eta},$$
$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} - \frac{\sigma B^2 v}{\eta} = -\frac{\sigma U B}{\eta \ln \frac{R_2}{R_1} r}.$$
$$\frac{\sigma B^2 v}{\eta} \approx \frac{\sigma U B}{\eta \ln \frac{R_2}{R_1} r} \Rightarrow v(r) \approx \frac{U}{r B \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$